§ 2 Nombres complexes

Ce deuxième paragraphe est une partie consacrée aux fondements mathématiques.

§ 2.1 Le corps des nombres complexes

■ Extensions successives

Certaines équations à coefficients naturels ont leurs solutions dans $\mathbb{N}$

$$a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad x = a + b \quad \in \mathbb{N}$$

Par contre, l'ensemble des solutions de l'équation

$$1 + x = 0 \text{ et } x \in \mathbb{N}$$

est vide. On peut contruire une extension de $\mathbb{N}$, appelée *ensemble des entiers relatifs* et notée $\mathbb{Z}$, dans laquelle l'équation précédente possède une solution notée $x = -1$. Les équations suivantes possèdent une solution entière

$$a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad x = a - b \quad \in \mathbb{Z}$$
$$a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad x = a\, b \quad \in \mathbb{Z}$$

Par contre, l'ensemble des solutions de l'équation

$$2\, x = 1 \text{ et } x \in \mathbb{Z}$$

est vide. On peut construire une extension de $\mathbb{Z}$, appelée *corps des nombres rationnels* et notée $\mathbb{Q}$, dans laquelle l'équation précédente possède une solution notée $x = \frac{1}{2}$. Les équations suivantes possèdent une solution rationnelle

$$a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}^* \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{b} \quad \in \mathbb{Q}$$
$$a \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad x = a^2 \quad \in \mathbb{Q}$$

Par contre, l'ensemble des solutions de l'équation

$$x^2 = 2 \text{ et } x \in \mathbb{Q}$$

est vide. On peut contruire une extension de $\mathbb{Q}$, appelée *corps des nombres réels* et notée $\mathbb{R}$, dans laquelle l'équation précédente possède deux solutions notées $x = \pm\sqrt{2}$. Par contre, l'ensemble des solutions de l'équation

$$x^2 = -1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

est vide.

■ Le problème de l'extension des nombres réels

Peut-on contruire une extension de $\mathbb{R}$, appelée *corps des nombres complexes* et notée $\mathbb{C}$, dans laquelle l'équation $x^2 = -1$ possède deux solutions notées $x = \pm\, i$?

Nous exigeons que les principales règles de calcul relatives aux opérations définies sur les nombres réels soient encore valables pour les nombres complexes.

■ Définition d'un corps

Un **corps** est un triplet $(K, +, \cdot)$ où K désigne un ensemble de "nombres" muni de deux opérations internes : l'addition notée + et la multiplication notée ·; les propriétés suivantes doivent être vérifiées :

$(K, +)$ est un groupe commutatif

$$\begin{array}{ll}
x,\ y \in K \quad \Longrightarrow & x + y \in K \\
\forall\, x,\ y,\ z \in K & (x + y) + z = x + (y + z) \\
\exists\ 0 \in K \quad \forall\ x \in K & 0 + x = x + 0 = x \\
\forall\ x \in K\ \ \exists\ (-x) \in K & x + (-x) = 0 \\
\forall\, x,\ y \in K & x + y = y + x
\end{array}$$

$(K^*, \cdot)$ est un groupe commutatif où $K^* = K \backslash \{0\}$

$$\begin{array}{ll}
x,\ y \in K^* \quad \Longrightarrow & x \cdot y \in K^* \\
\forall\, x,\ y,\ z \in K^* & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\
\exists\ 1 \in K^* \quad \forall\ x \in K^* & 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \\
\forall\ x \in K^*\ \ \exists\ \left(\frac{1}{x}\right) \in K^* & x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1 \\
\forall\, x,\ y \in K^* & x \cdot y = y \cdot x
\end{array}$$

Distributivité

$$\forall\, x,\ y,\ z \in K \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Exemples

$(\mathbb{Q},\ +,\ \cdot)$ est un corps
$(\mathbb{R},\ +,\ \cdot)$ est un corps

Contre-exemples

$(\mathbb{N},\ +,\ \cdot)$ n' est pas un corps
$(\mathbb{Z},\ +,\ \cdot)$ n' est pas un corps

■ Le problème de l'extension des nombres réels

On cherche un corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tel que

1° $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
2° les restrictions des opérations $+$ et $\cdot$ de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ sont les opérations usuelles de $\mathbb{R}$
3° $\mathbb{C}$ contient un nombre i tel que $i^2 = -1$.

■ Construction du corps des nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{C}$

Géométriquement, les réels sont représentés par une droite continue. Selon une idée due à Gauss (1799), prenons pour $\mathbb{C}$ l'ensemble des vecteurs du plan

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour faire en sorte que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, identifions la droite des nombres réels à la première composante

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a, \qquad \text{en particulier} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

La deuxième composante des nombres complexes est désignée par le facteur de i

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = b\, i \qquad \text{en particulier} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

L'addition

L'addition des nombres complexes coïncide avec l'addition usuelle des vecteurs du plan.

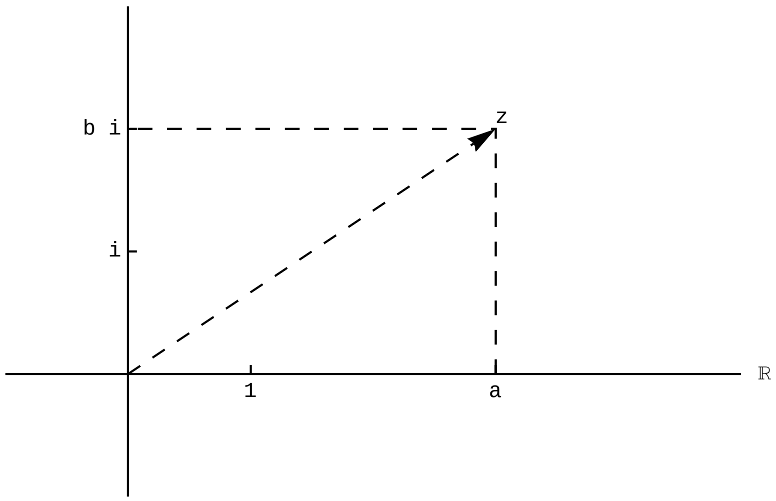
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = a + b\,i$$

C'est sous la forme $z = a + b\,i$, appelée forme cartésienne ou forme algébrique, que l'on représente usuellement les nombres complexes. En d'autres termes

$$\boxed{\mathbb{C} = \{z \mid z = a + b\,i,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}}$$

La première composante est appelée partie réelle, la deuxième partie imaginaire.
Les notations correspondantes sont les suivantes. Pour $z = a + b\,i$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = a; \\ \mathrm{Im}(z) = b \end{array}}$$



Les nombres réels sont des nombres complexes particuliers caractérisés par

$$z \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Im}(z) = 0$$

Les nombres de la forme $z = b\,i$ sont appelés imaginaires purs. Ils sont caractérisés par

$$\mathrm{Re}(z) = 0$$

Remarque
La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel :

$$\mathrm{Im}(3 + 5\,i) \neq 5\,i \qquad \text{mais} \qquad \mathrm{Im}(3 + 5\,i) = 5$$

La règle d'addition des nombres complexes exprime que
* la partie réelle de la somme est égale à la somme des parties réelles et
* la partie imaginaire de la somme est égale à la somme des parties imaginaires

Pour $z_1 = a_1 + b_1\,i$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$,
$z_2 = a_2 + b_2\,i$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathbf{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i}}$$

(Voir *Formulaires et tables*). En d'autres termes, pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{Re}(z_1 + z_2) = \mathbf{Re}(z_1) + \mathbf{Re}(z_2); \\ \mathbf{Im}(z_1 + z_2) = \mathbf{Im}(z_1) + \mathbf{Im}(z_2) \end{array}}$$

Multiplication
La multiplication de deux nombres complexes est une opération qui, à deux nombres complexes, fait correspondre un nombre complexe. Pour déterminer la multiplication complexe, nous utilisons
* d'une part les règles de calcul des corps;

* d'autre part, la nouvelle règle que nous voulons obtenir $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= \left(a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2\right) + (a_1 b_2 i + b_1 a_2 i) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i \end{aligned}$$

La multiplication des nombres complexes est définie comme suit
* la partie réelle du produit est égale au produit des parties réelles moins le produit des parties imaginaires;
* la partie imaginaire du produit est égale à la partie réelle du premier multipliée par la partie imaginaire du deuxième plus la partie imaginaire du premier multipliée par la partie réelle du deuxième

Pour $z_1 = a_1 + b_1 i$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$,
$z_2 = a_2 + b_2 i$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i}$$

(Voir *Formulaires et tables*). En termes équivalents, pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2); \\ \mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) \end{array}}$$

La multiplication de deux nombres complexes se distingue
* du produit scalaire (le produit scalaire de deux vecteurs du plan donne un nombre réel);
* du produit vectoriel (le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace donne un vecteur de l'espace).

C'est cette multiplication qui fait tout l'intérêt des nombres complexes.

($\mathbb{C}$, +, ·) <u>est un corps</u>
L'élément neutre pour la somme est $0 + 0\,i = 0$.
L'élément neutre pour la multiplication est $1 + 0\,i = 1$.
Montrons que chaque nombre complexe non nul z possède un inverse $\frac{1}{z}$ tel que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Soit $z = a + b\,i$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\,i} = \frac{(a - b\,i)}{(a + b\,i)\,(a - b\,i)} = \frac{a - b\,i}{a^2 + b^2 + 0\,i} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{(-b)}{a^2 + b^2}\,i$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Les autres propriétés des corps se démontrent aisément. Nous en vérifierons quelques unes dans les exercices.

($\mathbb{C}$, +, ·) <u>est une extension de</u> $\mathbb{R}$
Pour des nombres complexes qui sont réels,
* l'addition complexe et l'addition réelle coïncident et
* la multiplication complexe et la multiplication réelle coïncident. En effet,

$$(a + 0\,i) + (b + 0\,i) = (a + b) + (0 + 0)\,i = a + b + 0\,i = a + b$$

$$(a + 0\,i) \cdot (b + 0\,i) = (a\,b - 0 \times 0) + (a\,0 + 0\,b)\,i = a\,b + 0\,i = a\,b$$

<u>Dans</u> ($\mathbb{C}$, +, ·), <u>l'équation</u> $x^2 = -1$ <u>admet pour solutions</u> $x = i$ <u>et</u> $x = -i$. En effet,

$$i^2 = (0 + 1\,i)\,(0 + 1\,i) = (0 \times 0 - 1 \times 1) + (0 \times 1 + 1 \times 0)\,i = -1$$

$$(-i)^2 = (0 + (-1)\,i)\,(0 + (-1)\,i) = (0 \times 0 - (-1)\,(-1)) + (0\,(-1) + (-1)\,1)\,i = -1$$

Finalement, le problème d'extension que nous nous étions posé est résolu.

Egalité de deux nombres complexes en forme cartésienne

$$\boxed{z_1 = z_2 \iff (\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2))}$$

■ Note historique et terminologique

Les mots *réel*, *imaginaire* et *complexe* ne doivent pas être pris dans leur sens usuel. Dans le contexte des mathématiques, les mots ont un sens particulier et technique.

Ce sont des raisons historiques qui expliquent la situation. Entre 1545 (Cardan) et 1799 (Gauss), on a utilisé les nombres complexes formellement - comme un truc qui marche - sans pouvoir leur donner un sens. De là vient le nom *imaginaire*. Par la suite, même après avoir construit mathématiquement les nombres complexes et prouvé leur existence, le nom *imaginaire* est resté.

C'est ainsi que les nombres *imaginaires* (au sens mathématique) sont néammoins *réels* (au sens usuel), car ils existent (au sens mathématique). Par contre, les nombres *imaginaires* (au sens mathématique) ne sont pas *réels* (au sens mathématique).

Voir exercice 2-1

§ 2.2 Forme polaire

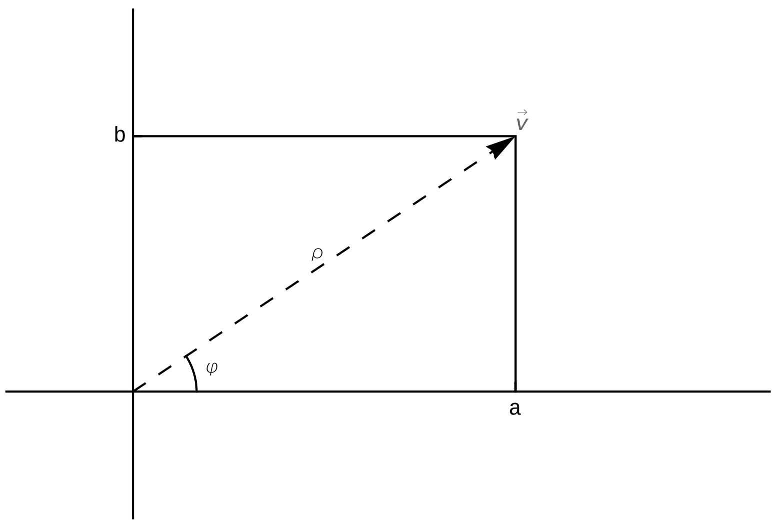
■ Préparation : formes cartésienne et polaire d'un vecteur du plan

Etant donné un vecteur non nul sous la forme cartésienne $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ c'est-à-dire exprimé par rapport à une base orthonormée, on peut le représenter sous la forme $(\rho, \ \varphi)$ où

ρ = norme du vecteur $\vec{v}$ et

φ = angle principal orienté entre les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$.

Le couple $(\rho, \ \varphi)$ est appelé forme polaire du vecteur $\vec{v}$.



Si la forme polaire $\vec{v} = (\rho, \ \varphi)$ est donnée, on peut calculer la forme cartésienne correspondante

$$\vec{v} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si la forme cartésienne $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est donnée, on peut calculer la forme polaire correspondante

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \text{Arccos}\left(\frac{a}{\rho}\right) & \text{si } b \geq 0 \\ -\text{Arccos}\left(\frac{a}{\rho}\right) & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Module

Le module d'un nombre complexe z est le nombre réel qui représente la norme du vecteur correspondant. Sa définition est

$$\text{Pour} \quad z = a + b\,i \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

On a les propriétés

$$|\,z\,| \in \mathbb{R}$$

$$|\,z\,| \geq 0$$

$$|\,z\,|^2 = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$$

$$|\,i\,| = 1$$

La propriété suivante est appelée *inégalité du triangle*

$$|\,z_1 + z_2\,| \leq |\,z_1\,| + |\,z_2\,|$$

Argument

L'argument d'un nombre complexe non nul $z = a + b\,i$ est la mesure principale de l'angle orienté entre les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Son expression est

$$\boxed{\text{Arg}(z) = \begin{cases} \text{Arccos}\left(\frac{\text{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{si} \quad \text{Im}(z) \geq 0 \\ -\text{Arccos}\left(\frac{\text{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{si} \quad \text{Im}(z) < 0 \end{cases}}$$

L'argument du nombre complexe *zéro* n'est pas défini.

On a les propriétés

$$\text{Arg}(z) \in \mathbb{R}$$

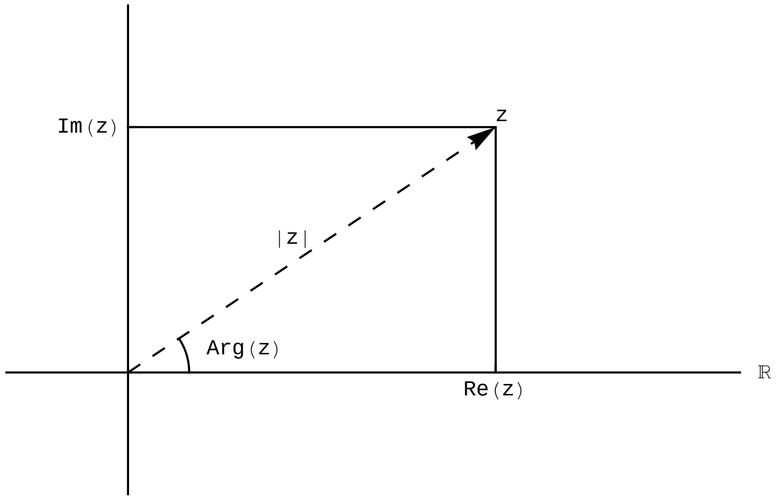
$$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$$

$$\text{Arg}(1) = 0$$

$$\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(-1) = \pi$$

$$\text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$$



■ Forme polaire d'un nombre complexe

Soit $z = a + b\,i$ un nombre complexe non nul et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le vecteur correspondant du plan. La forme polaire du vecteur est

$$\vec{v} = (\rho,\ \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \rho = |z| \quad \text{et} \quad \varphi = \mathrm{Arg}(z)$$

La forme cartésienne du vecteur est

$$\vec{v} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \rho = |z| \quad \text{et} \quad \varphi = \mathrm{Arg}(z)$$

Le nombre complexe correspondant est le même nombre complexe z, mais écrit sous la forme polaire

$$\boxed{z = \rho\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))} \qquad \text{avec} \qquad \rho = |z| \quad \text{et} \quad \varphi = \mathrm{Arg}(z)$$

$$\boxed{z = |z|\,(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z)))}$$

■ Conjugaison

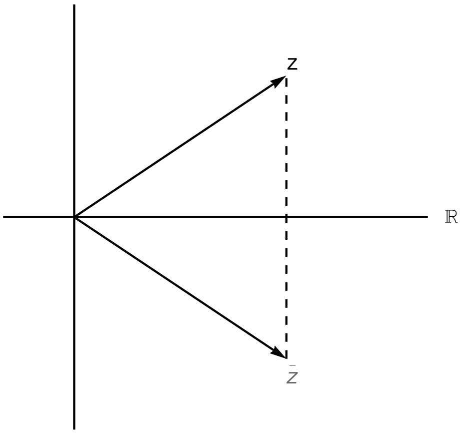
Le conjugué d'un nombre complexe z est le nombre complexe $\bar{z}$ dont la partie imaginaire est l'opposé de celle de z :

Pour $z = a + b\,i$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\bar{z} = a - b\,i}$$

En d'autres termes,

$$\mathrm{Re}\left(\bar{z}\right) = \mathrm{Re}(z)$$
$$\mathrm{Im}\left(\bar{z}\right) = -\mathrm{Im}(z)$$



<u>Relations du conjugué complexe avec le module, la partie réelle et la partie imaginaire</u>

Si $z \in \mathbb{R}$ alors $\overline{z} = z$. D'autre part,

$$\boxed{\begin{array}{l} z\,\bar{z} = |z|^2; \\ \operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}; \\ \operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2\,i} \end{array}}$$

En effet, pour $z = a + b\,i$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$z\,\bar{z} = (a + b\,i)\,(a - b\,i) = a^2 - b^2\,i^2 + (-a\,b + b\,a)\,i = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(a+b\,i)+(a-b\,i)}{2} = \frac{2\,a}{2} = a = \operatorname{Re}(z)$$

$$\frac{z-\bar{z}}{2\,i} = \frac{(a+b\,i)-(a-b\,i)}{2\,i} = \frac{2\,b\,i}{2\,i} = b = \operatorname{Im}(z)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \left|\bar{z}\right| = |z|; \\ \operatorname{Arg}\left(\bar{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z) \end{array}}$$

Pour la démonstration, nous allons utiliser la parité des fonctions trigonométriques

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$$
$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$$

En partant de la forme polaire de z

$$z = \rho\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \qquad \text{avec} \quad \varphi = \operatorname{Arg}(z)$$

dont le conjugué complexe est

$$\bar{z} = \rho\,(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)) = \rho\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

on voit que

$$\left|\bar{z}\right| = \rho = |z|$$
$$\operatorname{Arg}\left(\bar{z}\right) = -\varphi = -\operatorname{Arg}(z)$$

<u>Conjugué de la somme, du produit et du quotient</u>

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\ ;\\ \overline{z_1\,z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}\ ;\\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\end{array}}$$

(Voir *Formulaires et tables*). En effet, pour $z_1 = a_1 + b_1\, i$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$, $z_2 = a_2 + b_2\, i$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}$,

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{(a_1+b_1\, i\,) + (a_2+b_2\, i\,)} = \overline{(a_1+a_2) + (b_1+b_2)\, i} = (a_1+a_2) - (b_1+b_2)\, i =$$
$$(a_1 - b_1\, i\,) + (a_2 - b_2\, i\,) = \overline{(a_1+b_1\, i\,)} + \overline{(a_2+b_2\, i\,)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

D'une part,

$$\overline{z_1\, z_2} = \overline{(a_1+b_1\, i\,)\,(a_2+b_2\, i\,)} =$$
$$\overline{(a_1\, a_2 - b_1\, b_2) + (a_1\, b_2 + b_1\, a_2)\, i} = (a_1\, a_2 - b_1\, b_2) - (a_1\, b_2 + b_1\, a_2)\ i$$

D'autre part,

$$\overline{z_1}\ \ \overline{z_2} = \overline{(a_1+b_1\, i\,)}\ \ \overline{(a_2+b_2\, i\,)} =$$
$$(a_1 - b_1\, i\,)\,(a_2 - b_2\, i\,) = (a_1\, a_2 - b_1\, b_2) + (-a_1\, b_2 - b_1\, a_2)\, i$$

La démonstration de la règle du conjugué du quotient est l'objet d'un exercice :

Voir exercice 2-2.

<u>Inverse d'un nombre complexe</u>

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|\,z\,|^2}}$$

Cette relation est évidente.

Application : calcul de l'inverse d'un nombre complexe.

$$\frac{1}{8+5\, i} = \frac{8-5\, i}{(8+5\, i)\,(8-5\, i)} = \frac{8-5\, i}{8^2+5^2} = \frac{8-5\, i}{89} = \frac{8}{89} - \frac{5}{89}\, i$$

On l'utilise aussi pour effectuer la division de deux nombres complexes:

$$\frac{30+6\, i}{8+5\, i} = (30+6\, i)\,\frac{1}{8+5\, i} = (30+6\, i)\,\frac{8-5\, i}{89} = \frac{1}{89}\,(30+6\, i)\,(8-5\, i) =$$
$$\frac{1}{89}\,((30\times 8+6\times 5) + (-30\, 5+6\times 8)\, i) = \frac{1}{89}\,(270-102\, i) = \frac{270}{89} - \frac{102}{89}\, i$$

Voir exercices 2-3 et 2-4.

<u>Egalité de deux nombres complexes en forme polaire</u>

Les nombres complexes

$$z_1 = \cos\left(-\frac{2\,\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\frac{2\,\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{4\,\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{4\,\pi}{3}\right)$$

sont égaux. Plus généralement, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments ne diffèrent que d'un nombre entier de tours :

$$z_1 = z_2 \iff (\,|\,z_1\,| = |\,z_2\,| \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}\,(z_1) = \mathrm{Arg}\,(z_2) + k\, 2\,\pi,\ \ k \in \mathbb{Z})$$

<u>Congruences</u>

Pour dire que deux angles φ et ψ sont égaux "à des tours entiers près", Gauss a introduit la notation suivante qui se lit "*φ est congru à ψ modulo 2 π*":

$$\varphi \equiv \psi \pmod{2\pi} \iff \varphi - \psi = k\,2\pi \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}$$

Avec cette notation, la proposition s'écrit

$$\boxed{z_1 = z_2 \iff (\,|z_1| = |z_2| \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(z_1) \equiv \mathrm{Arg}(z_2) \pmod{2\pi})}$$

qu'on exprime verbalement comme suit : *le module de z_1 est égal au module de z_2 et l'argument de z_1 est congru à l'argument de z_2 modulo 2 π.*

■ Interprétation géométrique de la multiplication

$$\boxed{\begin{array}{l} |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,; \\ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) \equiv \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \pmod{2\pi} \end{array}}$$

Démonstration

Nous allons utiliser les formules d'addition d'arcs de la trigonométrie

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$$
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)$$

Ecrivons les nombres complexes sous la forme polaire

$$\begin{array}{lll} z_1 = \rho_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)) & \text{avec} & \rho_1 = |z_1|, \quad \varphi_1 = \mathrm{Arg}(z_1) \\ z_2 = \rho_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) & \text{avec} & \rho_2 = |z_2|, \quad \varphi_2 = \mathrm{Arg}(z_2) \\ z_1 z_2 = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) & \text{avec} & \rho = |z_1 z_2|, \quad \varphi = \mathrm{Arg}(z_1 z_2) \end{array}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) &= z_1 z_2 \\ &= \rho_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))\,\rho_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \\ &= \rho_1\rho_2((\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + \\ &\quad i(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2))) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

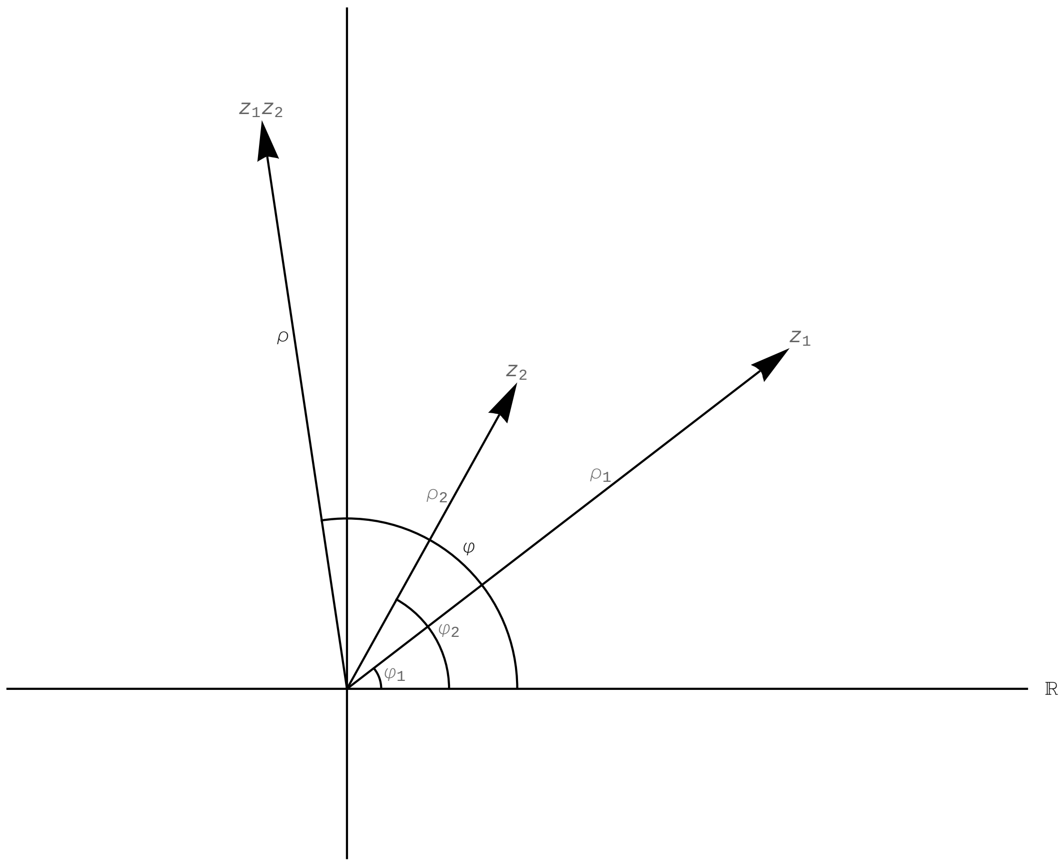
d'où on tire

$$\rho = \rho_1\rho_2$$
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi \equiv \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi}$$

En mots (voir figure)

le module du produit est égal au produit des modules,

l'argument du produit est congru à la somme des arguments modulo 2 π.



En d'autres termes (voir *Formulaires et tables*):

$$\boxed{\begin{array}{l}\rho_1\,(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))\,\rho_2\,(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \\ \qquad = \rho_1\,\rho_2\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))\end{array}}$$

Voir exercice 2-5.

■ Similitudes linéaires directes

Une *similitude linéaire directe* est une application

$$\mathbb{C} \overset{f}{\to} \mathbb{C}, \qquad z \mapsto f(z)$$

qui est la composition d'une homothétie de rapport $\rho > 0$ et d'une rotation d'angle φ.
En vertu de l'interprétation géométrique de la multiplication, nous pouvons dire que la multiplication par un nombre complexe non nul a

$$f(z) = a\,z$$

est une similitude directe dont le rapport d'homothétie est $\rho = |a|$ et l'angle de rotation est $\varphi = \mathrm{Arg}(a)$.

Voir exercices 2-6 et 2-7.

■ Formules de de Moivre (1730)

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}|z^n| = |z|^n; \\ \mathrm{Arg}(z^n) \equiv n\,\mathrm{Arg}(z) \pmod{2\pi}\end{array}}$$

En d'autres termes, (voir *Formulaires et tables*):

$$\boxed{(\rho\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)))^n = \rho^n\,(\cos(n\,\varphi) + i\sin(n\,\varphi)) \qquad \text{pour } n \in \mathbb{Z}}$$

Démonstration
En utilisant les règles précédemment établies pour le produit

$$|z^2| = |z\,z| = |z|\;|z| = |z|^2$$
$$\operatorname{Arg}(z^2) \equiv \operatorname{Arg}(z\,z) \equiv \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z) \equiv 2\operatorname{Arg}(z) \qquad (\operatorname{mod} 2\pi)$$

En itérant

$$|z^3| = |z^2\,z| = |z^2|\;|z| = |z|^2\;|z| = |z|^3$$
$$\operatorname{Arg}(z^3) \equiv \operatorname{Arg}(z^2\,z) \equiv \operatorname{Arg}(z^2) + \operatorname{Arg}(z) \equiv$$
$$2\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z) \equiv 3\operatorname{Arg}(z) \qquad (\operatorname{mod} 2\pi)$$

Pour $n \geq 1$, on peut écrire ces formules sous la forme polaire et effectuer des produits itérés :

$$z = \rho\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \qquad \text{avec} \quad \rho = |z| \quad \text{et} \quad \varphi = \operatorname{Arg}(z)$$
$$z^2 = \rho^2\,(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$$
$$\ldots$$
$$z^n = \rho^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

La formule est ainsi vérifiée pour $n > 0$. Pour $n = 0$ et $z \neq 0$, on a

$$|z^0| = 1 = |z|^0$$
$$\operatorname{Arg}(z^0) \equiv \operatorname{Arg}(1) \equiv 0 \equiv 0\operatorname{Arg}(z) \qquad (\operatorname{mod} 2\pi)$$

Pour les exposants entiers négatifs, on peut se ramener aux cas précédents. En effet, pour $n > 0$,

$$|z^{-n}|\;|z^n| = |z^{-n}\,z^n| = |1| = 1$$
$$\Longrightarrow \qquad |z^{-n}| = \frac{1}{|z^n|} = \frac{1}{|z|^n} = |z|^{-n}$$
$$\operatorname{Arg}(z^{-n}) + \operatorname{Arg}(z^n) \equiv \operatorname{Arg}(z^{-n}\,z^n) \equiv \operatorname{Arg}(1) \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} 2\pi)$$
$$\Longrightarrow \qquad \operatorname{Arg}(z^{-n}) \equiv -\operatorname{Arg}(z^n) \equiv -n\operatorname{Arg}(z) \qquad (\operatorname{mod} 2\pi)$$

Pour $n = -1$, les formules de de Moivre nous donnent un cas particulier intéressant qui exprime le module et l'argument de l'inverse:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}\,; \\ \operatorname{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\operatorname{Arg}(z) \quad (\operatorname{mod} 2\pi) \end{array}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))} = \frac{1}{\rho}\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))}$$

Voir exercice 2 - 8.

■ Notation exponentielle

L'exponentielle réelle possède les propriétés suivantes (rappel)

$$e^{x+y} = e^x\,e^y$$
$$(e^x)^2 = e^x\,e^x = e^{x+x} = e^{2x}$$
$$\ldots$$
$$(e^x)^n = e^{n\,x} \qquad \text{où} \qquad e \simeq 2.718$$

Pour représenter les nombres complexes, Euler a introduit en 1743 la notation suivante, appelée notation exponentielle

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)}$$

dont voici quelques cas particuliers

$$e^{i\,0} = 1$$
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$
$$e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -i$$

La <u>forme polaire</u> prend alors la forme suivante

$$\boxed{z = \rho\, e^{i\varphi}} \qquad \text{où} \quad \rho = |z| \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \operatorname{Arg}(z) \pmod{2\pi}, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \left|\rho\, e^{i\varphi}\right| = \rho \;; \\ \operatorname{Arg}\left(\rho\, e^{i\varphi}\right) \equiv \varphi \pmod{2\pi} \end{array}}$$

L'égalité de deux nombres complexes non nuls prend la forme suivante

$$\boxed{\rho_1\, e^{i\varphi_1} = \rho_2\, e^{i\varphi_2} \iff (\rho_1 = \rho_2 \quad \text{et} \quad \varphi_1 \equiv \varphi_2 \pmod{2\pi})}$$

Dans cette notation, le <u>produit de deux nombres complexes</u> prend une forme simple

$$\boxed{\left(\rho_1\, e^{i\varphi_1}\right)\left(\rho_2\, e^{i\varphi_2}\right) = \rho_1\,\rho_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

(Voir *Formulaires et tables*). En effet,

$$\begin{aligned} &\left(\rho_1\, e^{i\varphi_1}\right)\left(\rho_2\, e^{i\varphi_2}\right) \\ &\quad = \rho_1\,(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))\,\rho_2\,(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \\ &\quad = \rho_1\,\rho_2\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \\ &\quad = \rho_1\,\rho_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned}$$

Le <u>conjugué</u> d'un nombre complexe est

$$\boxed{\overline{\rho\, e^{i\varphi}} = \rho\, e^{-i\varphi}}$$

En effet,

$$\begin{aligned} &\overline{\rho\, e^{i\varphi}} = \overline{\rho\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))} = \\ &\quad \rho\,(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)) = \rho\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \rho\, e^{i(-\varphi)} = \rho\, e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

Les parties réelle et imaginaire sont données par

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(\rho\, e^{i\varphi}\right) = \rho\cos(\varphi) = \rho\,\dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \;; \\ \operatorname{Im}\left(\rho\, e^{i\varphi}\right) = \rho\sin(\varphi) = \rho\,\dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2\,i} \end{array}}$$

En effet,

$$\begin{aligned} &\rho\,\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \rho\,\frac{(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) + (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))}{2} = \\ &\quad \rho\,\frac{(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) + (\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))}{2} = \\ &\quad \rho\,\frac{2\cos(\varphi)}{2} = \rho\cos(\varphi) = \operatorname{Re}\left(\rho\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))\right) = \operatorname{Re}\left(\rho\, e^{i\varphi}\right) \\ &\rho\,\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2\,i} = \rho\,\frac{(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) - (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))}{2\,i} = \end{aligned}$$

$$\rho\,\frac{(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))-(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi))}{2\,i}=$$
$$\rho\,\frac{2\,i\sin(\varphi)}{2\,i}=\rho\sin(\varphi)=\mathrm{Im}\left(\rho\,(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))\right)=\mathrm{Im}\left(\rho\,e^{i\,\varphi}\right)$$

L'inverse d'un nombre complexe est

$$\boxed{\frac{1}{\rho\,e^{i\,\varphi}}=\frac{1}{\rho}\,e^{-i\,\varphi}}$$

En effet, posons $z_1=\rho\,e^{i\varphi}$, $z_2=\frac{1}{\rho}\,e^{-i\varphi}$ et vérifions que $z_1\,z_2=1$

$$\left(\rho\,e^{i\,\varphi}\right)\left(\frac{1}{\rho}\,e^{-i\,\varphi}\right)=\left(\rho\,\frac{1}{\rho}\right)\left(e^{i\,\varphi}\,e^{-i\,\varphi}\right)=1\,e^{i\,\varphi-i\,\varphi}=e^{i\,0}=\cos(0)+i\sin(0)=1$$

La formule de de Moivre s'écrit

$$\boxed{\left(\rho\,e^{i\,\varphi}\right)^n=\rho^n\,e^{i\,n\,\varphi}}\qquad\text{pour}\qquad n\in\mathbb{Z}$$

En effet, pour $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$\left(\rho e^{i\,\varphi}\right)^n=(\rho\,(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)))^n$$
$$=\rho^n\,(\cos(n\,\varphi)+i\sin(n\,\varphi))\Big)=\rho\,e^{i\,n\,\varphi}$$

Remarque
Euler ne s'est pas contenté d'utiliser cette notation par simple commodité. Il a aussi étendu l'exponentielle réelle aux nombres complexes et justifié les formules par des "développements en série". Mais ce point de vue dépasse les ambitions de ce cours.

La formule suivante, due à Euler (1743), est célèbre

$$e^{i\,\pi}=-1$$

car elle relie trois constantes mathématiques fondamentales : le nombre π, le nombre e et le nombre i.

■ Racines complexes

Pour déterminer les racines complexes n-èmes de z, on cherche les nombres (sous la forme polaire) $\rho\,e^{i\varphi}$ tels que

$$\left(\rho\,e^{i\,\varphi}\right)^n=z$$

$$\rho^n\,e^{i\,n\,\varphi}=z$$

$$\rho^n=\mathrm{Abs}[z]\quad\text{et}\quad n\,\varphi\equiv\mathrm{Arg}[z]\quad(\mathrm{mod}\,2\,\pi)$$

$$\rho^n=\mathrm{Abs}[z]\quad\text{et}\quad n\,\varphi=\mathrm{Arg}[z]+k\,2\,\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\rho=\sqrt[n]{\mathrm{Abs}[z]}\quad\text{et}\quad\varphi=\frac{\mathrm{Arg}[z]}{n}+k\,\frac{2\,\pi}{n},\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{\rho=\sqrt[n]{\mathrm{Abs}[z]}\quad\text{et}\quad\varphi=\frac{\mathrm{Arg}[z]}{n}+k\,\frac{2\,\pi}{n},\qquad k\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}}$$

Retenons que tout nombre complexe non nul possède n racines complexes.

Voir exercices 2 - 8 à 2 - 13.

§ 2.3 Nombres complexes dans Mathematica

Si on utilise le clavier, c'est le symbole I qui désigne la partie imaginaire d'un nombre complexe.

$$w = \frac{1}{8 + 5\,I}$$

$$\frac{8}{89} - \frac{5\,i}{89}$$

$$z = \frac{30 + 6\,I}{8 + 5\,I}$$

$$\frac{270}{89} - \frac{102\,i}{89}$$

Si on utilise la palette, c'est le symbole i qui désigne la partie imaginaire d'un nombre complexe

$$w = \frac{1}{8 + 5\,i}$$

$$\frac{8}{89} - \frac{5\,i}{89}$$

$$z = \frac{30 + 6\,i}{8 + 5\,i}$$

$$\frac{270}{89} - \frac{102\,i}{89}$$

Des fonctions permettent de calculer la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué :

Re[w]

$$\frac{8}{89}$$

Im[w]

$$-\frac{5}{89}$$

Conjugate[w]

$$\frac{8}{89} + \frac{5\,i}{89}$$

Mathematica peut aussi calculer le module et l'argument

ρ = **Abs**[z]

$$6\sqrt{\frac{26}{89}}$$

N[ρ]

3.24297

φ = **Arg**[z]

$$-\mathrm{ArcTan}\left[\frac{17}{45}\right]$$

N[φ]

−0.361204

```
Arg[(1 - ⅈ)/(1 - √3 ⅈ)]
```

$$\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}\right]$$

```
FullSimplify[Arg[(1 - ⅈ)/(1 - √3 ⅈ)]]
```

$$\frac{\pi}{12}$$

La notation exponentielle est reconnue. Pour désigner l'exponentielle, on peut utiliser soit la lettre E du clavier, soit le caractère e de la palette :

```
ρ ⅇ^(ⅈ φ)
```

$$6\sqrt{\frac{26}{89}}\, e^{-i\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{17}{45}\right]}$$

```
Re[ρ ⅇ^(ⅈ φ)]
```

$$\frac{270}{89}$$

```
Im[ρ ⅇ^(ⅈ φ)]
```

$$-\frac{102}{89}$$

Par exemple, pour résoudre une équation sur le corps des nombres complexes,

```
Reduce[w x == z, x, Complexes]
```

```
x == 30 + 6 ⅈ
```

```
Clear[a, b];
Reduce[a + ⅈ b == x + ⅈ y, {x, y}, Complexes]
```

```
y == - ⅈ a + b + ⅈ x
```

Dans les équations littérales, si des paramètres ou des inconnues sont des nombres réels, il faut l'indiquer explicitement

```
Reduce[a + ⅈ b == x + ⅈ y ∧ a ∈ Reals ∧ b ∈ Reals ∧ x ∈ Reals ∧ y ∈ Reals,
 {x, y}, Complexes]
```

```
(b | a) ∈ Reals && x == a && y == b
```

■ Racines complexes

Avec *Mathematica*, calculons, par exemple, la racine cubique de $5+2\,i$

```
Clear[z]; Reduce[z^3 == 5 + 2 ⅈ, z, Complexes]
```

```
z == (5 + 2 ⅈ)^(1/3) || z == - (-1)^(1/3) (5 + 2 ⅈ)^(1/3) || z == (-1)^(2/3) (5 + 2 ⅈ)^(1/3)
```

Remplaçons **Or[...]** par **List[...]**

```
Apply[List, Reduce[z^3 == 5 + 2 ⅈ, z, Complexes]]
```

```
{z == (5 + 2 ⅈ)^(1/3), z == - (-1)^(1/3) (5 + 2 ⅈ)^(1/3), z == (-1)^(2/3) (5 + 2 ⅈ)^(1/3)}
```

Remplaçons encore **Equal[...]** par la valeur du membre de droite. On obtient l'ensemble des solutions:

```
es = Apply[List, Reduce[z^3 == 5 + 2 ⅈ, z, Complexes]] /. Equal[z, vz_] → vz
```

$\{(5+2\,i)^{1/3}, -(-1)^{1/3}\,(5+2\,i)^{1/3}, (-1)^{2/3}\,(5+2\,i)^{1/3}\}$

Traduction en notation exponentielle: $-1 = e^{i\,\pi}$; $(-1)^p = e^{i\,p\,\pi}$; $-(-1)^p = e^{i\,\pi}\,e^{i\,p\,\pi} = e^{i\,(p+1)\,\pi}$;

$(5+2\,i)^{\frac{1}{3}}$ désigne <u>une</u> racine cubique:

```
ComplexExpand[(5 + 2 ⅈ)^(1/3)]
```

$29^{1/6}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right] + i\,29^{1/6}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right]$

```
ComplexExpand[es]
```

$$\left\{29^{1/6}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right] + i\,29^{1/6}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right],\right.$$
$$-\frac{1}{2}\,29^{1/6}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right] + \frac{1}{2}\,\sqrt{3}\,29^{1/6}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right] +$$
$$i\left(-\frac{1}{2}\,\sqrt{3}\,29^{1/6}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right] - \frac{1}{2}\,29^{1/6}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right]\right),$$
$$-\frac{1}{2}\,29^{1/6}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right] - \frac{1}{2}\,\sqrt{3}\,29^{1/6}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right] +$$
$$\left.i\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{3}\,29^{1/6}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right] - \frac{1}{2}\,29^{1/6}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{5}\right]\right]\right)\right\}$$

```
N[es]
```

$\{1.73872 + 0.221722\,i, -0.677344 - 1.61664\,i, -1.06138 + 1.39492\,i\}$

Voir exercices 2 - 8 à 2 - 13.

Exercices du § 2

■ Exercice 2-1 [Sans ordinateur]

a) Démontrez que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ vérifie la loi de distributivité

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{C} \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

b) a, b désignant des nombres réels, démontrez que les deux nombres complexes suivants

$$z_1 = a + i\,b, \qquad z_2 = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2}$$

sont inverses, c'est-à-dire

$$z_1\,z_2 = 1$$

c) Pour $\rho \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, démontrez les propriétés suivantes

$$\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\,(z_1) + \mathrm{Re}\,(z_2)$$

$$\mathrm{Im}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\,(z_1) + \mathrm{Im}\,(z_2)$$

$$\mathrm{Re}\,(\rho\,z) = \rho\,\mathrm{Re}\,(z)$$

$$\mathrm{Im}\,(\rho\,z) = \rho\,\mathrm{Im}\,(z)$$

■ Exercice 2-2 [Sans ordinateur]

Démontrez que

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

■ Exercice 2-3 [Sans ordinateur]

Mettez les nombres complexes suivants sous la forme cartésienne

$$\frac{1+2\,i}{1-2\,i}, \qquad \frac{1}{(1+2\,i)\,(3-i)}, \qquad \frac{-2}{1-i\,\sqrt{3}}$$

■ Exercice 2-4 [Sans ordinateur]

Etablissez la formule pour calculer le quotient de deux nombres complexes donnés sous la forme cartésienne

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\,i}{a_2 + b_2\,i} = \;... \qquad \text{où} \quad z_2 \neq 0,\; a_1 = \mathrm{Re}\,(z_1),\; ...,\; b_2 = \mathrm{Im}\,(z_2)$$

Vérifiez la réponse obtenue avec le formulaire.

■ Exercice 2-5 [Sans ordinateur]

A partir des règles de la multiplication

$$|\,z_1\,z_2\,| = |\,z_1\,|\;|\,z_2\,|$$
$$\mathrm{Arg}\,(z_1\,z_2) \equiv \mathrm{Arg}\,(z_1) + \mathrm{Arg}\,(z_2) \qquad (\mathrm{mod}\;2\,\pi)$$

démontrez les formules suivantes

a) Pour $\rho \in \mathbb{R},\; \rho > 0$ et $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{Arg}\,(\rho\,z) = \mathrm{Arg}\,(z)$$

et donnez une interprétation géométrique.

b) Pour $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|\,z_2\,|}$$

c) Pour $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|}$$

d) Pour $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$,

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z_2}\right) \equiv -\mathrm{Arg}\,(z_2) \qquad (\mathrm{mod}\;2\,\pi)$$

e) Pour $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$,

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \mathrm{Arg}\,(z_1) - \mathrm{Arg}\,(z_2) \qquad (\mathrm{mod}\;2\,\pi)$$

■ Exercice 2-6 [Sans ordinateur]

Un nombre complexe z étant donné, on s'intéresse au nombre complexe $w = z\,i$.

a) Calculez $|\,w\,|$ en fonction de $|\,z\,|$ et

Arg(w) en fonction de Arg(z).

b) Construisez le nombre complexe w avec la règle et le compas, c'est-à-dire choisissez un vecteur qui représente z puis construisez le vecteur qui représente w.

c) Mêmes questions pour le nombre complexe $w = z\, i^2$.
Donnez une interprétation géométrique de la multiplication par $i^2 = -1$.

d) Mêmes questions pour le nombre complexe $w = z\, i^3$.
Donnez une interprétation géométrique de la multiplication par $i^3 = -i$.

■ Exercice 2-7 [Sans ordinateur]

a) Illustrez géométriquement l'opération d'addition dans $\mathbb{C}$: deux nombres complexes z_1, z_2 étant donnés, construisez, avec la règle et le compas, le vecteur qui représente le nombre complexe

$$w = z_1 + z_2$$

b) b étant un nombre complexe fixé, interprétez géométriquement la translation de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$f(z) = z + b$$

■ Exercice 2-8 [Sans ordinateur, puis avec *Mathematica*]

Déterminez le module et l'argument des nombres complexes suivants

$$z_1 = 2 - 2\, i, \qquad z_2 = 1 - i\sqrt{3}, \qquad z_1\, z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}$$

■ Exercice 2-9 [Sans ordinateur]

Etablissez la formule pour calculer le quotient de deux nombres complexes donnés sous la forme polaire

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\, e^{i\,\varphi_1}}{\rho_2\, e^{i\,\varphi_2}} = \ldots \quad \text{où} \quad z_2 \neq 0,\ \rho_1 = |z_1|,\ \ldots,\ \varphi_2 = \mathrm{Arg}(z_2)$$

■ Exercice 2-10

a) *[Sans ordinateur]* Ecrivez le nombre suivant sous la forme cartésienne, c'est-à-dire calculez sa partie réelle et sa partie imaginaire

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^{1967}$$

b) *[Avec Mathematica]* Vérifiez la réponse obtenue, ainsi que certains calculs intermédiaires.

■ Exercice 2-11 [Sans ordinateur]

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1 - i\, z}{1 + i\, z}\right) = 0$$

et interprétez géométriquement l'ensemble des solutions dans le plan.

Indication : écrivez z sous la forme $z = x + i\, y$ où $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque : Il est demandé de s'exercer à faire de tels calculs sans ordinateur. Après avoir fait les calculs à la main, on peut vérifier la réponse avec *Mathematica*. Par exemple, ici, pour vérifier l'expression simplifiée de $\mathrm{Re}\left[\frac{1-i(x+i\,y)}{1+i(x+i\,y)}\right]$, on peut calculer

```
ComplexExpand[Re[(1 - I (x + I y))/(1 + I (x + I y))]]
```

$$\frac{1}{x^2+(1-y)^2}-\frac{x^2}{x^2+(1-y)^2}-\frac{y^2}{x^2+(1-y)^2}$$

On peut aussi résoudre l'équation

```
Reduce[Re[(1 - I (x + I y))/(1 + I (x + I y))] == 0 ∧ x ∈ Reals ∧ y ∈ Reals, {x, y}, Complexes]
```

$$(x == -1 \,\&\&\, y == 0) \,||\, \left(-1 < x < 0 \,\&\&\, \left(y == -\sqrt{1-x^2} \,||\, y == \sqrt{1-x^2}\right)\right) \,||$$
$$(x == 0 \,\&\&\, y == -1) \,||\, \left(0 < x < 1 \,\&\&\, \left(y == -\sqrt{1-x^2} \,||\, y == \sqrt{1-x^2}\right)\right) \,||\, (x == 1 \,\&\&\, y == 0)$$

■ Exercice 2-12 [Sans ordinateur, puis avec *Mathematica*]

On donne

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$$

a) Ecrivez z sous la forme polaire ou exponentielle.
b) Déterminez le plus petit entier positif n tels que z^n soit réel.
c) Déterminez le plus petit entier positif n tels que z^n soit imaginaire pur.

■ Exercice 2-13 [Sans ordinateur]

z_1, z_2 désignant deux nombres complexes non nuls, soit z tel que

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$$

a) Exprimez z, $|z|$, Re(z) et Im(z) en fonction de z_1, z_2.

b) Notons $a_1 = \text{Re}(z_1)$, $b_1 = \text{Im}(z_1)$, $a_2 = \text{Re}(z_2)$, $b_2 = \text{Im}(z_2)$.
Exprimez $|z|$, Re(z) et Im(z) en fonction de a_1, b_1, a_2, b_2.

c) Exprimez Arg(z) de diverses manières.

■ Exercice 2-14 [Calculez d'abord sans ordinateur, puis vérifiez avec *Mathematica*]

On donne

$$z_1 = \frac{2}{3}+\frac{5}{6}\,i; \qquad z_2 = \frac{1}{2}+\frac{7}{3}\,i.$$

Calculez les expressions suivantes

$$a = z_1^2; \qquad b = \frac{1}{z_1}; \qquad c = \frac{z_2}{z_1}$$
$$d = \frac{z_2}{z_1\,\overline{z_1}}; \qquad e = \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right); \qquad f = \frac{\text{Re}(z_1)}{\text{Re}(z_2)}$$
$$g = \text{Im}\left(\frac{z_2}{z_1 - z_2}\right); \quad h = \frac{\text{Im}(z_2)}{\text{Im}(z_1) - \text{Re}(z_2)}.$$

Représentez graphiquement les nombres complexes suivants dans le plan de Gauss:

$$z_1; \quad z_2; \quad z_1^2; \quad \frac{1}{z_1}; \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

■ Exercice 2-15

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, d'abord *sans ordinateur*, puis avec **Reduce[...]**.

$a)\qquad 5z = 8iz + 81 - 5i$

$b)\qquad z + 2i\bar{z} = 8 + 7i$

$c)\qquad z^2 = 1 + i$

$d)\qquad z + \frac{1}{z} = 1$

■ Exercice 2-16 [Calculez d'abord sans ordinateur, puis vérifiez avec *Mathematica*]

Calculez les expressions données

$a)\qquad (1+i)^3$

$b)\qquad (1+i)^4$

$c)\qquad \sum_{k=1}^{25} i^k$

$d)\qquad \sum_{k=0}^{20} (1+i)^k$

■ Exercice 2-17 [Calculez d'abord sans ordinateur, puis vérifiez avec *Mathematica*]

Ecrivez les nombres complexes donnés sous la forme polaire

$$a = 2 + 2i;\quad b = -2 + 2i;\quad c = 2 - 2\sqrt{3}\,i$$
$$d = 3i;\quad e = (1+i)^3;\quad f = (1-i)^4$$
$$g = \frac{1}{(1+i)^2};\quad h = \sum_{k=0}^{12} (1-i)^k$$

■ Exercice 2-18 [Calculez d'abord sans ordinateur, puis vérifiez avec *Mathematica*]

Exprimez les expressions trigonométriques $\cos(3\varphi)$ et $\sin(3\varphi)$ en fonction de $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$.

Indication: utilisez la formule de de Moivre.

■ Exercice 2-19 [Calculez d'abord sans ordinateur, puis vérifiez avec *Mathematica*]

Démontrez que

$$\cos(15°) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Indications: utilisez le fait que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right).$$

■ Exercice 2-20 [Sans ordinateur]

Donnez une méthode de construction à la règle et au compas du produit et du quotient de deux nombres complexes donnés quelconques.

Indication: Etant donnés trois segments de longueurs $1, \rho_1, \rho_2,$ le théorème de Thalès permet de construire un quatrième segment de longueur $\rho = \rho_1 \rho_2$.

■ Exercice 2-21 [Calculez d'abord sans ordinateur, puis vérifiez avec *Mathematica*]

a) Calculez les racines cubiques de l'unité, c'est-à-dire les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$.
Indication : utilisez la forme polaire.

b) Représentez ces trois racines dans le plan de Gauss.

c) Vérifiez que ces trois racines sont de la forme $1, \omega, \omega^2$ avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

■ Exercice 2-22 [Calculez d'abord sans ordinateur, puis vérifiez avec *Mathematica*]

a) Calculez les racines n-èmes de l'unité, c'est-à-dire les nombres complexes z tels que $z^n = 1$.
Indication : utilisez la forme polaire.

b) Vérifiez que ces n racines sont de la forme $1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}$ avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

c) Pour $n = 12$, représentez ces racines dans le plan de Gauss.

■ Exercice 2-23 [Calculez d'abord sans ordinateur, puis vérifiez avec *Mathematica*]

a) Calculez les racines cubiques du nombre complexe i.

b) Représentez ces trois racines dans le plan de Gauss.

■ Exercice 2-24 [Facultatif]

[Calculez d'abord sans ordinateur, puis vérifiez avec *Mathematica*]
Interprétez géométriquement l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto (1+i)\, z \end{aligned}$$

Donnez l'image par f de l'ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

■ Exercice 2-25 [Facultatif]

A partir des développements en série entière des fonctions suivantes (voir *Formulaires et tables*):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + ...$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + ...$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + ...$$

et sachant que les séries précédentes convergent absolument (c'est-à-dire qu'on peut réarranger librement l'ordre des termes), montrez qu'on peut en tirer la relation d'Euler

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$