

§ 2 Equations différentielles ordinaires du deuxième ordre

§ 2.1 Equations différentielles du deuxième ordre Exemples et approche qualitative

■ Oscillateur mécanique entretenu et amorti

Forces:

$-k y$ = force de rappel du ressort;

k est appelé constante du ressort;

$-f v = -f y' =$ force de frottement dans le cas d'un écoulement laminaire

(c'est-à-dire sans turbulences); f est appelé *coefficient d'amortissement*;

$A \sin(\Omega t)$ = force d'excitation où

A est appelé *amplitude de l'excitation* et

Ω est appelé *vitesse angulaire* (ou pulsation) de l'excitateur.

En l'absence d'autres forces, selon la loi de Newton,

$$-k y - f y' + A \sin(\Omega t) = m y''$$

$$y'' + \frac{f}{m} y' + \frac{k}{m} y = \frac{A}{m} \sin(\Omega t)$$

Pour caractériser le mouvement, il faut donner deux conditions initiales, la vitesse initiale et la position initiale:

$$y'(t_0) = v_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

■ Oscillateur électrique entretenu et amorti

Dans un circuit RLC série, on a

$L I' =$ chute de tension aux bornes de la bobine;

$R I =$ chute de tension aux bornes de la résistance (amortissement);

$\frac{Q}{C} =$ chute de tension aux bornes du condensateur;

$U_0 \sin(\Omega t) =$ tension aux bornes du générateur.

$$L I' + R I + \frac{Q}{C} = U_0 \sin(\Omega t)$$

$$L Q'' + R Q' + \frac{Q}{C} = U_0 \sin(\Omega t)$$

$$Q'' + \frac{R}{L} Q' + \frac{1}{LC} Q = \frac{U_0}{L} \sin(\Omega t)$$

Pour caractériser le mouvement, il faut donner deux conditions initiales, le courant initial et la charge initiale:

$$Q'(t_0) = I_0$$

$$Q(t_0) = Q_0$$

■ Définitions

Une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre est une équation dans laquelle la dérivée seconde $y''(t)$ est exprimée en fonction d'une variable t , de $y(t)$ et de la dérivée première $y'(t)$:

$$y'' = f(t, y, y')$$

On cherche la fonction $t \mapsto y(t)$ qui vérifie l'équation.

Dans le premier exemple (oscillations mécaniques), la fonction f est

$$f(t, y, y') = -\frac{f}{m} y' - \frac{k}{m} y + \frac{A}{m} \sin(\Omega t)$$

Les conditions initiales d'une telle équation sont généralement au nombre de *deux* et de la forme

$$\begin{aligned} y'(t_0) &= Y_1 \\ y(t_0) &= Y_0 \end{aligned}$$

L'équation est dite différentielle parce qu'elle contient des *dérivées* de la fonction inconnue $y(t)$.

On dit que l'équation est ordinaire parce que la fonction cherchée $y(t)$ ne dépend que d'une *seule variable* t .

On dit que l'équation est du deuxième ordre parce qu'elle contient une dérivée d'ordre deux (c'est-à-dire $y''(t)$) mais aucune dérivée d'ordre supérieur à deux.

■ Etude expérimentale qualitative

Au lieu d'être fondée sur des expériences de physique, notre approche qualitative s'appuyera sur des calculs exécutés par *Mathematica*. Dans une première lecture, il est conseillé de ne pas s'attarder sur la manière de calculer car nous y reviendrons dans les prochains paragraphes. Portez plutôt votre attention sur les propriétés des solutions obtenues comme s'il s'agissait de résultats expérimentaux.

```
SetOptions[Plot, AxesLabel -> {"t", "y(t)"}, PlotRange -> All, ImageSize -> {400, 300}];
```

■ Solution générale

Si on ne donne pas de conditions initiales, l'équation différentielle du deuxième ordre possède une infinité de solutions qui dépendent de deux paramètres $C[1]$, $C[2]$ appelées *constantes d'intégration*. Voici un exemple numérique:

```
p = 1; q = 17; Ω = 5; g0 = 2; t1 = 4.3;
Clear[g, y, t]; g[t_] := g0 Sin[Ω t]
```

```
sol = DSolve[y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == g[t], y[t], t]
```

$$\left\{ \left\{ y[t] \rightarrow e^{-t} C[2] \cos[4 t] + e^{-t} C[1] \sin[4 t] + \frac{1}{328} (-41 \cos[t] \cos[4 t] + \cos[4 t] \cos[9 t] - 41 \cos[4 t] \sin[t] - 41 \cos[t] \sin[4 t] - 9 \cos[9 t] \sin[4 t] + 41 \sin[t] \sin[4 t] + 9 \cos[4 t] \sin[9 t] + \sin[4 t] \sin[9 t]) \right\} \right\}$$

```
yg[t_] = Simplify[y[t] /. sol[[1]]]
```

$$e^{-t} C[2] \cos[4 t] - \frac{5}{41} \cos[5 t] + e^{-t} C[1] \sin[4 t] - \frac{4}{41} \sin[5 t]$$

■ Solution vérifiant les conditions initiales

Parmi les solutions précédentes, il en existe une et une seule qui vérifie deux conditions initiales données

```
y0 = 0; y1 = 0; Clear[y, t];
```

```
sol = DSolve[{y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == g[t], y[0] == y0, y'[0] == y1}, y[t], t]
```

$$\left\{ \left\{ y[t] \rightarrow -\frac{1}{328} e^{-t} \left(-40 \cos[4t] + 41 e^t \cos[t] \cos[4t] - e^t \cos[4t] \cos[9t] + 41 e^t \cos[4t] \sin[t] - 50 \sin[4t] + 41 e^t \cos[t] \sin[4t] + 9 e^t \cos[9t] \sin[4t] - 41 e^t \sin[t] \sin[4t] - 9 e^t \cos[4t] \sin[9t] - e^t \sin[4t] \sin[9t] \right) \right\} \right\}$$

```
yi[t_] = Simplify[y[t] /. sol[[1]]]
```

$$\frac{1}{328} e^{-t} (40 \cos[4t] - 40 e^t \cos[5t] + 50 \sin[4t] - 32 e^t \sin[5t])$$

Vérifions que $y_i[t]$ est bien solution du système:

```
Simplify[yi''[t] + 2 p yi'[t] + q yi[t] - g[t]]
```

0

```
yi[0]
```

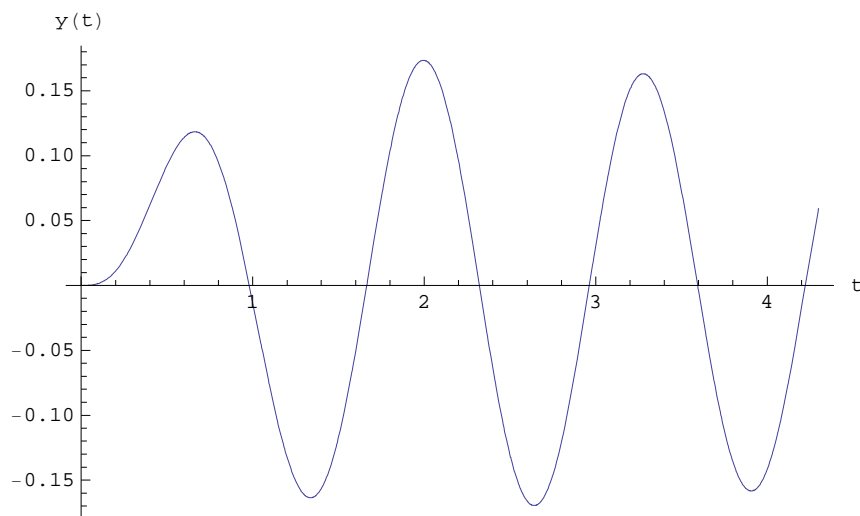
0

```
yi'[0]
```

0

Graphique:

```
Plot[yi[t], {t, 0, t1}]
```



■ Dépendance de la condition initiale : état transitoire, état stationnaire

Calculons d'autres solutions de la même équation différentielle mais en partant de conditions initiales différentes:

```
y0 = 1/5; y1 = 0;
```

```
sol = DSolve[{y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == g[t], y[0] == y0, y'[0] == y1}, y[t], t];  
y11[t_] = Simplify[y[t] /. sol[[1]]]
```

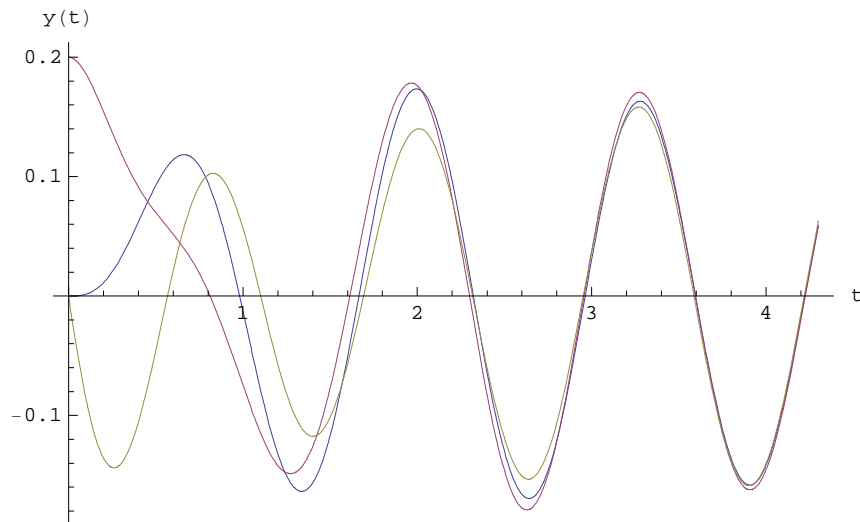
$$\frac{1}{410} e^{-t} (132 \cos[4t] - 50 e^t \cos[5t] + 83 \sin[4t] - 40 e^t \sin[5t])$$

```
y0 = 0; y1 = -1;
```

```
sol = DSolve[{y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == g[t], y[0] == y0, y'[0] == y1}, y[t], t];
yi2[t_] = Simplify[y[t] /. sol[[1]]]
```

$$-\frac{1}{41} e^{-t} (-5 \cos[4 t] + 5 e^t \cos[5 t] + 4 (\sin[4 t] + e^t \sin[5 t]))$$

```
Plot[{yi[t], yi1[t], yi2[t]}, {t, 0, t1}]
```



Au début du mouvement, la position de l'oscillateur dépend des conditions initiales. Cet intervalle de temps est appelé *état transitoire*. Après un certain temps, l'oscillateur atteint un état de mouvement qui ne dépend presque plus des conditions initiales; c'est l'*état stationnaire*.

■ Une solution particulière

A l'état stationnaire, le mouvement de l'oscillateur est approximativement harmonique. Nous montrerons dans le § 2.3 qu'il existe une solution particulière qui est une *sinusoïde* :

```
Clear[yp];
```

$$yp[t_] := \frac{g_0}{\sqrt{(q - \Omega^2)^2 + (2 p \Omega)^2}} \sin\left[\Omega t - \text{ArcCos}\left[\frac{q - \Omega^2}{\sqrt{(q - \Omega^2)^2 + (2 p \Omega)^2}}\right]\right];$$

```
yp[t]
```

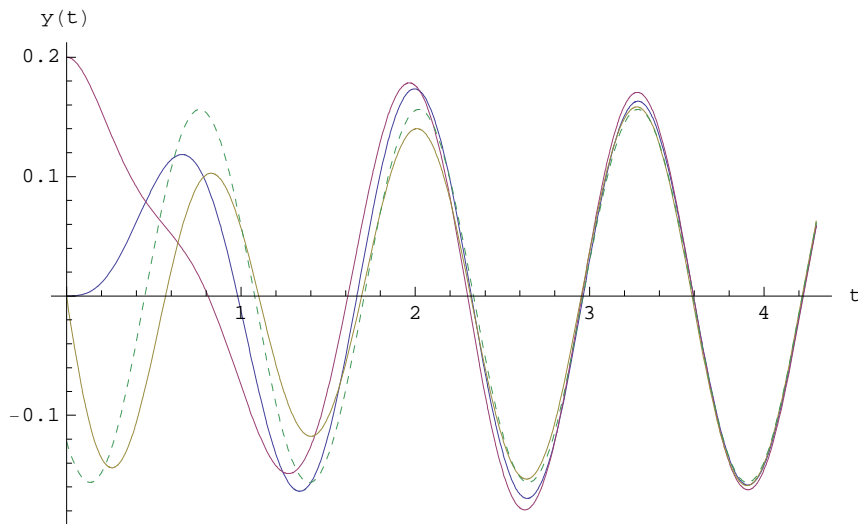
$$\frac{\sin\left[5 t - \text{ArcCos}\left[-\frac{4}{\sqrt{41}}\right]\right]}{\sqrt{41}}$$

Vérifions que cette fonction est une solution de l'équation différentielle

```
FullSimplify[yp''[t] + 2 p yp'[t] + q yp[t] - g[t]]
```

```
0
```

```
Plot[{yi[t], yi1[t], yi2[t], yp[t]}, {t, 0, t1},
PlotStyle -> {Dashing[{}], Dashing[{}], Dashing[{}], Dashing[{0.01`}]}
```



Cette solution correspond à des conditions initiales particulières qui dépendent des données

$y_P[0]$

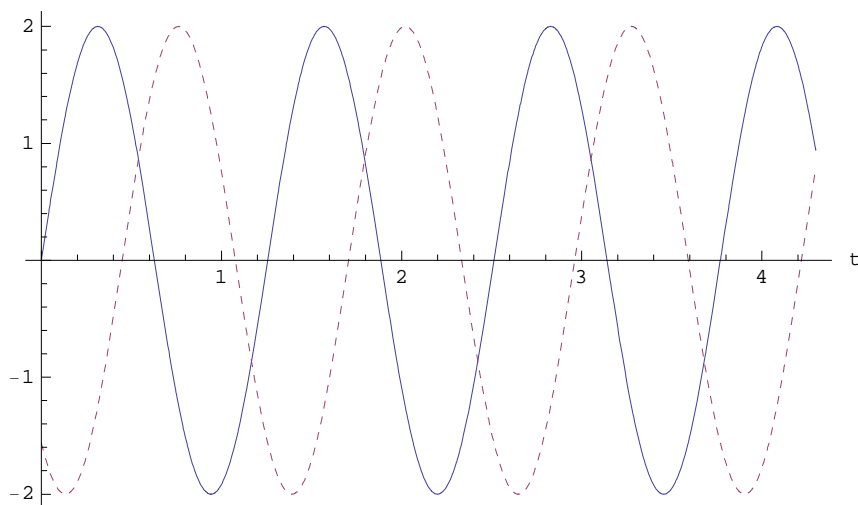
$$-\frac{5}{41}$$

$y_P'[0]$

$$-\frac{20}{41}$$

Pour estimer la fréquence de cette solution particulière, comparons-la à la fréquence de l'excitateur:

```
Plot[{g[t],  $\sqrt{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2}$  yP[t]}, {t, 0, t1},
PlotStyle -> {Dashing[{}], Dashing[{0.01^}]}, AxesLabel -> {"t", None}]
```

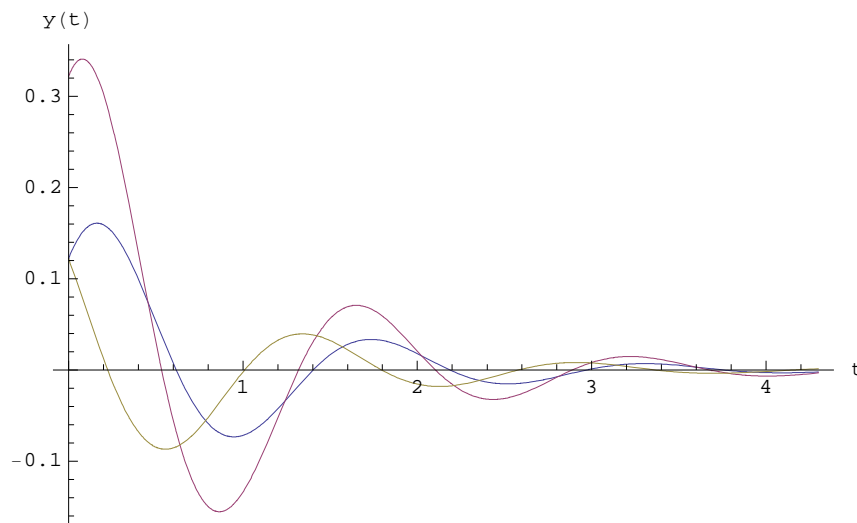


On observe que, après une période transitoire, l'excitateur contraint le système à osciller à *la même fréquence* que lui. Cependant, le mouvement d'oscillation peut être *déphasé* par rapport au mouvement d'entretien.

Solution générale homogène

En quoi deux solutions générales diffèrent-elles ?

```
Plot[{y1[t] - yp[t], y11[t] - yp[t], y12[t] - yp[t]}, {t, 0, t1}]
```



On constate que la différence entre deux solutions particulières tend rapidement vers 0. L'intervalle de temps durant lequel cette différence est non négligeable est appelé *phase transitoire*.

Du point de vue mathématique

Considérons deux solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ qui vérifient la même équation différentielle

$$y_1''(t) + 2p y_1'(t) + q y_1(t) = g(t)$$

$$y_2''(t) + 2p y_2'(t) + q y_2(t) = g(t)$$

Soustrayons les deux équations:

$$(y_2''(t) - y_1''(t)) + 2p y_2'(t) - 2p y_1'(t) + q y_2(t) - q y_1(t) = 0$$

$$(y_2 - y_1)''(t) + 2p (y_2 - y_1)'(t) + q (y_2 - y_1)(t) = 0$$

Notons $y_{\text{hom}} = y_2 - y_1$ cette différence. On a

$$y_{\text{hom}}''(t) + 2p y_{\text{hom}}'(t) + q y_{\text{hom}}(t) = 0$$

Les équations pour lesquelles ces soustractions prennent une forme simple sont appelées *équations différentielles linéaires*. Une définition plus précise sera donnée dans le paragraphe 2.2.

On appelle *équation homogène associée* l'équation différentielle que l'on obtient en remplaçant $g(t)$ par 0, c'est-à-dire $y'' + 2p y' + q y = 0$. La solution générale de l'équation homogène associée est notée y_{hom} . Par opposition, l'équation initiale $y'' + 2p y' + q y = g(t)$ dans laquelle $g(t) \neq 0$ est appelée *équation inhomogène*.

Nous venons de démontrer que la différence entre deux solutions de l'équation inhomogène est solution de l'équation homogène.

$$Y_2 - Y_1 = Y_{\text{hom}}$$

Réciproquement, si on ajoute une solution homogène y_{hom} à une solution particulière inhomogène y_1 , on obtient une autre solution inhomogène y_2

$$Y_2 = Y_1 + Y_{\text{hom}}$$

Enfin, si on dispose d'une solution particulière inhomogène y_1 , il est possible d'obtenir n'importe quelle autre solution inhomogène y_2 en ajoutant à y_1 une solution homogène appropriée y_{hom} .

Du point de vue physique

La différence $y_{\text{hom}} = y_2 - y_1$ étant une solution de l'équation homogène

$$Y_{\text{hom}}''(t) + 2p Y_{\text{hom}}'(t) + q Y_{\text{hom}}(t) = 0$$

elle décrit le mouvement d'un système *non entretenu*, c'est-à-dire avec $g(t) = 0$.

Si le frottement n'est pas nul ($p > 0$), après une phase transitoire, l'oscillateur non entretenu tend vers l'état de repos (voir figure précédente).

■ Travaux dirigés du § 2.1

■ 2.1- TD 1 Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Considérons un corps de masse m soumis à une force constante F . D'après l'équation de Newton, on a

$$m a = F$$

Le problème consiste à déterminer l'horaire $y(t)$ de la masse. La cinématique nous enseigne que la dérivée de l'horaire donne la vitesse $v(t)$ et la dérivée de la vitesse donne l'accélération $a(t)$

$$\begin{aligned} y'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= a(t) \quad \implies \quad y''(t) = a(t) \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de Newton, on obtient l'équation différentielle

$$y''(t) = \frac{F}{m} \quad \text{où} \quad m, F \quad \text{constants}$$

Nous y ajoutons les deux conditions initiales

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

- Résolvez cette équation différentielle ordinaire du deuxième ordre avec conditions initiales. (On ne demande pas seulement la réponse mais une méthode pour la déterminer.)
- Vérifiez la réponse obtenue (ou la réponse connue).
- Résolvez le cas particulier $y''(t) = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = v_0$.

■ 2.1- TD 2 Mouvement harmonique

On se place maintenant dans le cas où l'oscillateur n'est ni amorti ($f = 0$ donc $p = 0$), ni entretenu ($g(t) = 0$). Plus concrètement, considérons une masse m qui peut coulisser sans frottement le long d'une tige horizontale. Cette masse est soumise à l'action d'un ressort de masse négligeable et de raideur k . Appelons $y(t)$ sa position à l'instant t .

L'équation de Newton $F = m a$ prend la forme d'une équation différentielle

$$-k y = m y''$$

qui se réduit à

$$y'' + q y = 0 \quad \text{où} \quad q = \frac{k}{m}$$

Solutions de base

Calculez la valeur de ω pour laquelle les deux fonctions suivantes sont solutions

$$y_1(t) = \cos(\omega t)$$

$$y_2(t) = \sin(\omega t)$$

Solution générale

Principe de superposition : montrez que toute combinaison linéaire des deux fonctions de base est solution de l'équation différentielle

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Solution vérifiant les conditions initiales

Les deux conditions initiales

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

déterminent univoquement les constantes $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Autres formes de la solution

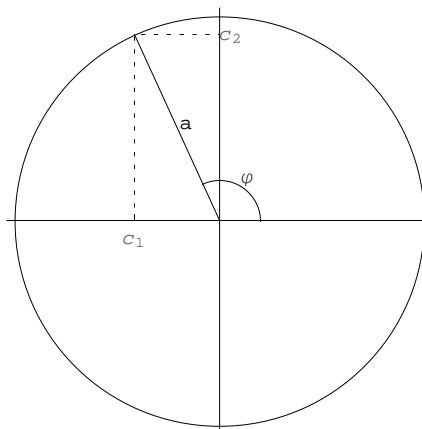
Toute solution peut s'écrire sous la forme

$$y(t) = a \cos(\omega t - \varphi)$$

Pour le montrer, commençons par écrire le vecteur suivant sous la forme polaire

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{et}$$

$$\varphi \quad \text{tel que} \quad \cos(\varphi) = \frac{c_1}{a} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{c_2}{a}$$



En vertu des formules d'addition d'arcs de la trigonométrie,

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) =$$

$$a (\cos(\varphi) \cos(\omega t) + \sin(\varphi) \sin(\omega t)) = a \cos(\omega t - \varphi)$$

§ 2.2 Equation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

■ Oscillateur mécanique amorti (non entretenu)

Equation différentielle

Forces:

$-k y$ = force de rappel du ressort;

k est appelé constante du ressort;

$-f v = -f y' =$ force de frottement dans le cas d'un écoulement laminaire

(c'est-à-dire sans turbulances); f est appelé *coefficient d'amortissement*.

En l'absence d'autres forces, selon la loi de Newton,

$$-k y - f y' = m y''$$

$$y'' + \frac{f}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0$$

Pour caractériser le mouvement, il faut donner deux conditions initiales, la vitesse initiale et la position initiale:

$$y' (t_0) = v_0$$

$$y (t_0) = y_0$$

■ Etude expérimentale qualitative

En l'absence de force de frottement ($f = 0$), une fois mise en mouvement, la masse oscillera perpétuellement selon un mouvement harmonique. On parle alors de mouvement périodique.

En présence d'une faible force de frottement (par rapport à la force de rappel), l'amplitude des oscillations décroît au fil du temps. On dit alors qu'on se trouve dans le cas des *oscillations amorties* (ou du mouvement pseudo-périodique).

Enfin, lorsque le frottement est important (par rapport à la force de rappel), la masse ne peut plus osciller. Lorsqu'on écarte la masse de la position d'équilibre, elle y retourne lentement, sans jamais la dépasser. On parle alors de *mouvement apériodique*.

La discussion de l'équation différentielle va aboutir à ces différents cas.

■ Oscillateur électrique amorti (non entretenu)

■ Equation différentielle

Dans un circuit RLC série, on a

$L I'$ = chute de tension aux bornes de la bobine;

$R I$ = chute de tension aux bornes de la résistance (amortissement);

$\frac{Q}{C}$ = chute de tension aux bornes du condensateur.

$$L I' + R I + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L Q'' + R Q' + \frac{Q}{C} = 0$$

$$Q'' + \frac{R}{L} Q' + \frac{1}{L C} Q = 0$$

Pour caractériser le mouvement, il faut donner deux conditions initiales, la vitesse initiale et la position initiale:

$$Q' (t_0) = I_0$$

$$Q (t_0) = Q_0$$

■ Etude expérimentale qualitative

En l'absence de résistance ($R = 0$), après la fermeture du circuit, la charge oscillera perpétuellement selon un mouvement harmonique. On parle alors de circuit à l'état périodique.

En présence d'une faible résistance, l'amplitude des oscillations décroît au fil du temps. On dit alors qu'on se trouve dans le cas des *oscillations amorties* (ou du mouvement pseudo-périodique).

Enfin, lorsque la résistance est grande, la charge ne peut plus osciller. A la fermeture du circuit, le condensateur se décharge lentement. On parle alors de *mouvement aperiodique*.

La discussion de l'équation différentielle devra aboutir à ces différents cas.

■ Définitions

L'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre est dite linéaire si elle est de la forme

$$y'' + 2 p(t) y' + q(t) y = g(t)$$

en d'autres termes, dans la forme générale ci-dessous, la fonction f est affine en y et en y'

$$y'' = f(t, y, y') \quad \text{avec} \quad f(t, y, y') = -2 p(t) y' - q(t) y + g(t)$$

L'équation (différentielle ordinaire du deuxième ordre) linéaire est dite homogène si la fonction g est nulle:

$$y'' + 2 p(t) y' + q(t) y = 0$$

L'équation (différentielle ordinaire du deuxième ordre) linéaire est dite à coefficients constants si les fonctions p , q et g sont constantes

$$y'' + 2 p y' + q y = g$$

En particulier, l'équation (différentielle ordinaire du deuxième ordre) suivante est linéaire homogène à coefficients constants si les fonctions p et q sont constantes

$$y'' + 2 p y' + q y = 0$$

C'est le cas pour les deux exemples précédents avec, pour l'ocillateur mécanique non excité par une force extérieure

$$p = \frac{f}{2m}, \quad q = \frac{k}{m}$$

et, pour l'ocillateur électrique non excité

$$p = \frac{R}{2L}, \quad q = \frac{1}{LC}$$

■ Solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène

Soit à résoudre l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

$$y'' + 2 p y' + q y = 0$$

dont on cherche la solution générale $y(t)$.

■ Principe de superposition

Le principe de superposition s'énonce comme suit :

* si $y(t)$ est solution, alors, pour toute constante c , la fonction $c y(t)$ est aussi solution;

* si $y_1(t)$, $y_2(t)$ sont deux solutions, alors la fonction $y_1(t) + y_2(t)$ est aussi solution.

La solution générale forme un espace vectoriel. Cet espace vectoriel est de dimension 2. En d'autres termes, l'ensemble des solutions est l'ensemble des multiples de deux solutions y_1 , y_2 appelées solutions de base

$$\{Y(t) \mid Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

On dit aussi que la solution générale s'écrit avec deux paramètres.

■ Solution générale du cas apériodique : $p^2 > q$

Selon la proposition d'Euler (1739), cherchons les solutions réelles de la forme

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

où λ est une constante à déterminer. Remplaçons dans l'équation différentielle

$$(e^{\lambda t})'' + 2p(e^{\lambda t})' + q e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2p\lambda e^{\lambda t} + q e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda^2 + 2p\lambda + q) e^{\lambda t} = 0$$

λ doit être solution de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + 2p\lambda + q = 0$$

Dans le cas où le discriminant est positif

$$\Delta = (2p)^2 - 4q = 4(p^2 - q) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 > q$$

l'équation caractéristique possède deux solutions

$$\lambda_1 = \frac{-2p - \sqrt{4(p^2 - q)}}{2} = -p - \sqrt{p^2 - q}$$

$$\lambda_2 = -p + \sqrt{p^2 - q}$$

ce qui nous donne deux solutions de l'équation différentielle, appelées *solutions de base*

$$y_1(t) = e^{(-p - \sqrt{p^2 - q})t}$$

$$y_2(t) = e^{(-p + \sqrt{p^2 - q})t}$$

La solution générale de l'équation différentielle est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux solutions

$$y(t) = c_1 e^{(-p - \sqrt{p^2 - q})t} + c_2 e^{(-p + \sqrt{p^2 - q})t}, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

■ Solutions de Mathematica

`Clear[y, t, p, q]`

`sol = DSolve[{y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t] == 0}, y[t], t]`

`{{{y[t] -> e^{(-p - \sqrt{p^2 - q})t} C[1] + e^{(-p + \sqrt{p^2 - q})t} C[2]}}`

signifie que la solution générale est

$$y(t) = c_1 e^{(-p - \sqrt{p^2 - q})t} + c_2 e^{(-p + \sqrt{p^2 - q})t} \quad \text{où} \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Remarques

Si le système est apériodique ($p^2 > q$), alors le système ne peut pas osciller et l'équation possède deux solutions réelles dont les formules sont données ci-dessus.

Si le système effectue des oscillations amorties ($p^2 < q$), la formule donnée par *Mathematica* demeure valide mais elle doit être interprétée comme une solution complexe. Nous donnerons les solutions réelles ci-après.

Si le système est à la limite d'apériodicité ($p^2 = q$), *Mathematica* ne donne qu'une solution; il en existe encore une autre que nous donnerons également ci-dessous.

■ Solution générale du cas des oscillations amorties : $p^2 < q$

Le circuit possède une fréquence propre ν

$$\omega = \sqrt{q - p^2}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{q - p^2}}{2\pi}$$

La solution générale de l'équation différentielle est l'ensemble des combinaisons linéaires de deux solutions de base

$$\boxed{y(t) = e^{-p t} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))}, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Pour une démonstration complète, consultez le document complémentaire suivant:

sur le site <http://www.collegedusud.ch/app/applmaths/>

suivez les liens **Documents Mathematica / Annexes: Equations différentielles**

et téléchargez le cahier **2-2_Equa_diff_suppl.nb**

Dans le cours, nous nous contentons de vérifier la solution donnée:

```
Clear[c1, c2]; ω = Sqrt[q - p^2];
y[t_] := e^{-p t} (c1 Cos[ω t] + c2 Sin[ω t])

Simplify[y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t]]
0
```

Il est aussi possible d'écrire la solution sous la forme suivante:

$$y(t) = a e^{-p t} \cos(\omega t - \psi) \quad a \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

■ Solution générale du cas de la limite d'apériodicité : $p^2 = q$

La solution générale de l'équation différentielle est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux solutions

$$\boxed{y(t) = e^{-p t} (c_1 + c_2 t)}, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Vérification:

```
Clear[c1, c2];
y[t_] := e^{-p t} (c1 + c2 t)

Simplify[y''[t] + 2 p y'[t] + q y[t]] /. q -> p^2
0
```

On peut montrer que c'est le cas où le mobile revient le plus rapidement à la position de repos. Cette propriété est utilisée dans la construction des galvanomètres.

Solution de l'équation différentielle linéaire homogène avec conditions initiales

■ Cas apériodique

```
Clear[y, t, p, q, c1, c2];
y[t_] := c1 e(-p-√(p2-q)) t + c2 e(-p+√(p2-q)) t
```

La donnée de conditions initiales $\{y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1\}$ détermine la valeur des constantes c_1 et c_2

```
Clear[t0, y0, y1];
es = Solve[{y[t0] == y0, y'[t0] == y1}, {c1, c2}]
```

$$\left\{ \left\{ c1 \rightarrow \frac{e^{-(-p-\sqrt{p^2-q}) t_0} \left(-p y_0 + \sqrt{p^2 - q} y_0 - y_1 \right)}{2 \sqrt{p^2 - q}}, c2 \rightarrow \frac{e^{-(-p+\sqrt{p^2-q}) t_0} \left(p y_0 + \sqrt{p^2 - q} y_0 + y_1 \right)}{2 \sqrt{p^2 - q}} \right\} \right\}$$

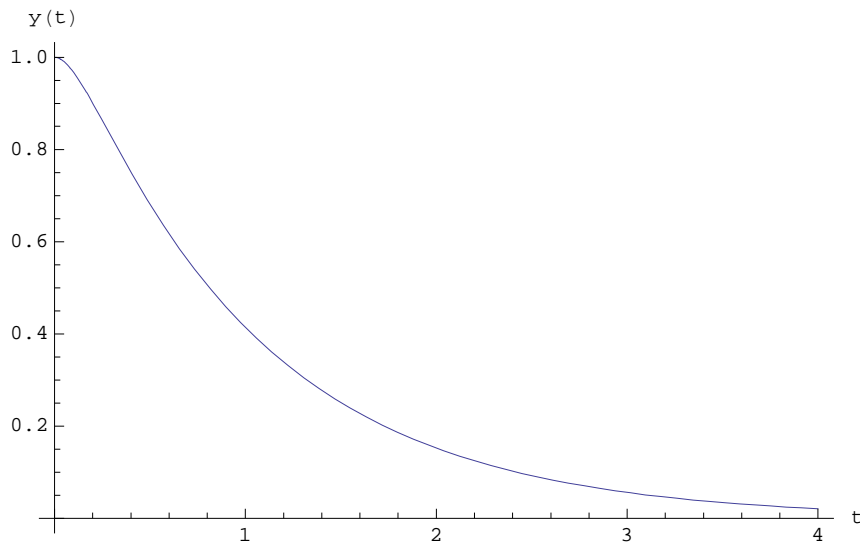
Voici donc la solution qui satisfait les conditions initiales

```
Simplify[y[t] /. es[[1]]]
```

$$\frac{1}{2 \sqrt{p^2 - q}} \left(e^{-(-p+\sqrt{p^2-q}) (t-t_0)} \left(-p y_0 + \sqrt{p^2 - q} y_0 - y_1 \right) + e^{-(-p-\sqrt{p^2-q}) (t-t_0)} \left(p y_0 + \sqrt{p^2 - q} y_0 + y_1 \right) \right)$$

Exemple numérique:

```
Clear[z];
z[t_] :=  $\frac{1}{2 \sqrt{p^2 - q}}$ 
 $\left( E^{-(-p+\sqrt{p^2-q}) (t-t_0)} \left( -p y_0 + \sqrt{p^2 - q} y_0 - y_1 \right) + E^{-(-p-\sqrt{p^2-q}) (t-t_0)} \left( p y_0 + \sqrt{p^2 - q} y_0 + y_1 \right) \right) /.
\{p \rightarrow 5, q \rightarrow 9, t_0 \rightarrow 0, y_0 \rightarrow 1, y_1 \rightarrow 0\}$ 
z[t]
 $\frac{1}{8} \left( -e^{-9 t} + 9 e^{-t} \right)$ 
Plot[z[t], {t, 0, 4}, ImageSize -> {400, 300}]
```



Dans ce cas, on dit que la force de frottement surcompense la force de rappel.

■ Cas des oscillations amorties

```
Clear[y, t, c1, c2]; ω = √(-p² + q);
y[t_] := e-p t (c1 Cos[ω t] + c2 Sin[ω t])
```

La donnée de conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$ détermine la valeur des constantes c_1 et c_2

```
Clear[t0, y0, y1];
es = Solve[{y[t0] == y0, y'[t0] == y1}, {c1, c2}]
```

$$\left\{ \left\{ c1 \rightarrow \frac{\left(e^{p t_0} \left(\sqrt{-p^2 + q} y_0 \cos\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right] - p y_0 \sin\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right] - y_1 \sin\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right] \right) \right)}{\left(\sqrt{-p^2 + q} \left(\cos\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right]^2 + \sin\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right]^2 \right) \right)}, c2 \rightarrow \frac{\left(e^{p t_0} \left(p y_0 \cos\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right] + y_1 \cos\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right] + \sqrt{-p^2 + q} y_0 \sin\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right] \right) \right)}{\left(\sqrt{-p^2 + q} \left(\cos\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right]^2 + \sin\left[\sqrt{-p^2 + q} t_0\right]^2 \right) \right)} \right\} \right\}$$

Voici donc la solution qui satisfait les conditions initiales :

```
Simplify[y[t] /. es[[1]]]
```

$$\frac{1}{\sqrt{-p^2 + q}} e^{p(-t+t_0)} \left(\sqrt{-p^2 + q} y_0 \cos\left[\sqrt{-p^2 + q} (t - t_0)\right] + (p y_0 + y_1) \sin\left[\sqrt{-p^2 + q} (t - t_0)\right] \right)$$

c'est-à-dire

$$y(t) = \frac{1}{\omega} e^{p(-t+t_0)} \left(\omega y_0 \cos[\omega (t - t_0)] + (p y_0 + y_1) \sin[\omega (t - t_0)] \right)$$

Exemple numérique:

```
Clear[z];
```

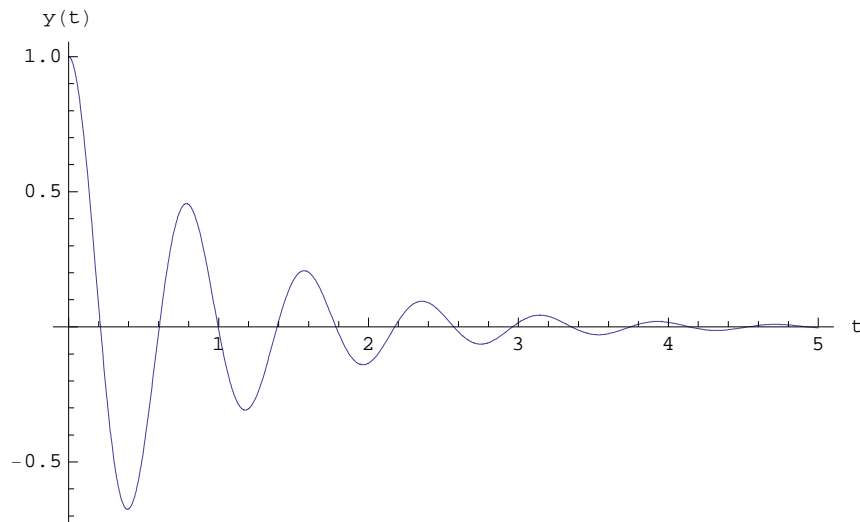
$$z[t_] := \frac{1}{\sqrt{-p^2 + q}}$$

$$\left(E^{p(-t+t_0)} \left(\sqrt{-p^2 + q} y_0 \cos[\sqrt{-p^2 + q} (t - t_0)] + (p y_0 + y_1) \sin[\sqrt{-p^2 + q} (t - t_0)] \right) \right) /.$$

$$\{p \rightarrow 1, q \rightarrow 65, t_0 \rightarrow 0, y_0 \rightarrow 1, y_1 \rightarrow 0\}$$

$$z[t]$$

$$\frac{1}{8} e^{-t} (8 \cos[8 t] + \sin[8 t])$$

$$\text{Plot}[z[t], \{t, 0, 5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{ImageSize} \rightarrow \{400, 300\}]$$


■ Cas de la limite d'apériodicité

```
Clear[y, t, c1, c2];
y[t_] := e^{-p t} (c1 + c2 t)
```

La donnée de conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$ détermine la valeur des constantes c_1 et c_2

```
Clear[t0, y0, y1];
es = Solve[{y[t0] == y0, y'[t0] == y1}, {c1, c2}]
```

$$\left\{ \left\{ c_1 \rightarrow -e^{p t_0} (-y_0 + p t_0 y_0 + t_0 y_1), c_2 \rightarrow e^{p t_0} (p y_0 + y_1) \right\} \right\}$$

Voici donc la solution qui satisfait les conditions initiales :

```
Simplify[y[t] /. es[[1]]]
```

$$e^{p(-t+t_0)} (y_0 + p t y_0 - p t_0 y_0 + t y_1 - t_0 y_1)$$

Exemple numérique:

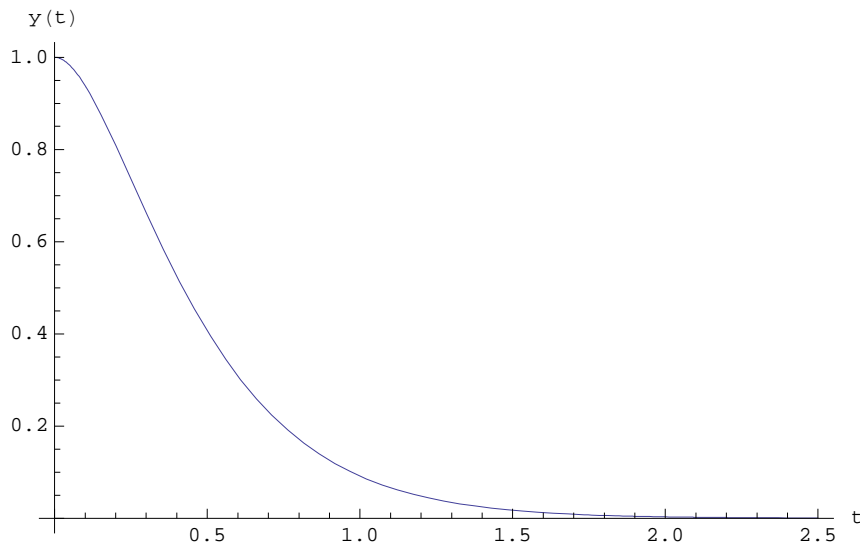
```
Clear[z];
z[t_] :=
```

$$E^{p(-t+t_0)} (y_0 + p t y_0 - p t_0 y_0 + t y_1 - t_0 y_1) /. \{p \rightarrow 4, q \rightarrow 16, t_0 \rightarrow 0, y_0 \rightarrow 1, y_1 \rightarrow 0\}$$

$$z[t]$$

$$e^{-4 t} (1 + 4 t)$$

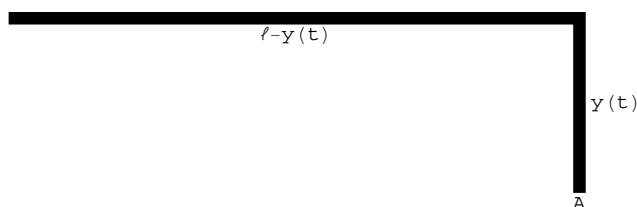
$$\text{Plot}[z[t], \{t, 0, 2.5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{ImageSize} \rightarrow \{400, 300\}]$$



■ Travaux dirigés du § 2.2

■ 2.2- TD 1 Glissement d'une corde sans frottement

Une corde de longueur ℓ se trouve dans la situation initiale suivante: une partie de longueur $\ell - y_0$ est posée horizontalement sur un toit tandis qu'une longueur y_0 pend dans le vide. A l'instant $t = 0$, on la lâche et, sous l'effet de la pesanteur, elle se met à glisser:



Nous négligeons les frottements. Pour décrire la position de la corde, on choisit la position $y(t)$ de son extrémité A. Etablissons l'équation différentielle.

La force qui s'exerce sur la corde est la force de pesanteur qui s'exerce sur la partie qui pend. Notons m la masse totale de la corde. La pesanteur vaut

$$F = \frac{Y}{\ell} m g$$

L'équation de Newton

$$F = m y''$$

conduit à l'équation différentielle avec conditions initiales

$$\boxed{\begin{aligned} y'' - \frac{g}{\ell} y &= 0 \\ y(0) &= y_0 ; \quad y'(0) = 0 \end{aligned}}$$

- Résolvez l'équation différentielle avec conditions initiales.
- Application numérique : on donne $\ell = 4 \text{ m}$, $y_0 = 1 \text{ m}$.

Combien de temps dure le glissement ?
 Quelle est la vitesse à la fin du glissement ?

■ 2.2- TD 2 Circuit RCL non entretenu

- a) A partir des lois de la physique, expliquez comment on arrive à l'équation différentielle du circuit RCL série non entretenu

$$L I'' + R I' + \frac{1}{C} I = 0$$

- b) A quelle condition une oscillation amortie se produit-elle ?
 Quelle est alors sa fréquence propre ?
- c) En partant du cours, écrivez la solution générale de l'équation différentielle.

§ 2.3 Equations différentielles linéaires inhomogènes

Soit à résoudre l'équation différentielle linéaire inhomogène avec conditions initiales

$$\begin{cases} Y'' + 2pY' + qY = g(t) \\ Y(t_0) = Y_0; Y'(t_0) = Y_1 \end{cases}$$

dans le cas où p et q sont des constantes et g est une sinusoïde $g(t) = g_0 \sin(\Omega t)$

■ Principe de superposition

Au lieu de chercher d'emblée l'ensemble des solutions de l'équation inhomogène y_{inh} , il suffit d'en déterminer une, n'importe laquelle, indépendamment de toute condition initiale, que nous appelons solution particulière et notons y_{part} . A partir de là, il est facile de construire la solution générale y_{inh} . En effet, on a

$$\begin{aligned} (Y_{inh})'' + 2p(Y_{inh})' + qY_{inh} &= g \\ (Y_{part})'' + 2p(Y_{part})' + qY_{part} &= g \\ (Y_{inh} - Y_{part})'' + 2p(Y_{inh} - Y_{part})' + q(Y_{inh} - Y_{part}) &= 0 \end{aligned}$$

La différence entre deux solutions de l'équation inhomogène est solution de l'équation homogène associée $y'' + 2p y' + q y = 0$ dont la solution générale est notée y_{hom} .

$$Y_{hom} = Y_{inh} - Y_{part}$$

$$Y_{inh} = Y_{hom} + Y_{part}$$

$$Y_{inh} = Y_{hom} + Y_{part}$$

En mots: la solution générale de l'équation inhomogène s'obtient en additionnant

- * la solution générale de l'équation homogène associée
- * une solution particulière de l'équation inhomogène.

■ 1-ère étape : solution générale de l'équation homogène

On commence par résoudre l'équation homogène associée $y'' + 2p y' + q y = 0$ dont la solution générale est

$$Y_{hom}(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t), \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

et où y_1, y_2 sont les deux fonctions de base qui ont été données dans le § 2.2. Leur forme explicite dépend du signe du discriminant $(p^2 - q)$ de l'équation caractéristique.

2-ème étape : une solution particulière inhomogène

On cherche une solution particulière de l'équation inhomogène, n'importe laquelle, sans se préoccuper de la condition initiale. Dans notre situation, cherchons s'il existe une solution y_{part} qui serait une fonction sinusoïdale de même fréquence que l'excitation. Nous admettons cependant qu'elle puisse être déphasée par rapport à l'excitation.

Première forme

$$(Y_{\text{part}})'' + 2p (Y_{\text{part}})' + q Y_{\text{part}} = g_0 \sin(\Omega t)$$

où, pour tenir compte d'un éventuel déphasage, $y_{\text{part}}(t) = a_1 \sin(\Omega t) + a_2 \cos(\Omega t)$

$$(-\Omega^2 a_1 \sin(\Omega t) - \Omega^2 a_2 \cos(\Omega t)) + 2p(\Omega a_1 \cos(\Omega t) - \Omega a_2 \sin(\Omega t)) + q(a_1 \sin(\Omega t) + a_2 \cos(\Omega t)) = g_0 \sin(\Omega t)$$

$$(-\Omega^2 a_1 - 2p\Omega a_2 + qa_1 - g_0) \sin(\Omega t) + (-\Omega^2 a_2 + 2p\Omega a_1 + qa_2) \cos(\Omega t) = 0$$

p, q, g_0 et Ω étant donnés, nous déterminons maintenant les nombres a_1, a_2 tels que l'égalité précédente soit vérifiée à tous les instants t :

$$\begin{cases} -\Omega^2 a_1 - 2p\Omega a_2 + qa_1 - g_0 = 0 \\ -\Omega^2 a_2 + 2p\Omega a_1 + qa_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (q - \Omega^2) a_1 + (-2p\Omega) a_2 = g_0 \\ (2p\Omega) a_1 + (q - \Omega^2) a_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système de deux équations linéaires à deux inconnues a pour solution

$$a_1 = \frac{(q - \Omega^2) g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2}, \quad a_2 = \frac{-2p\Omega g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2}$$

Finalement, une solution particulière est

$$y_{\text{part}}(t) = \frac{(q - \Omega^2) g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2} \sin(\Omega t) - \frac{2p\Omega g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2} \cos(\Omega t)$$

Deuxième forme

Le résultat précédent peut se récrire sous la forme

$$y_{\text{part}}(t) = a \sin(\Omega t - \varphi) \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} a = \text{amplitude de l'oscillation et} \\ \varphi = \text{déphasage de l'oscillation par rapport à l'excitation} \end{array}$$

Pour ce faire, calculons les coordonnées polaires (a, φ) du vecteur suivant

$$\begin{pmatrix} \frac{(q - \Omega^2) g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2} \\ \frac{2p\Omega g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

a est la norme du vecteur. Nous supposons que $g_0 > 0$.

$$a = \sqrt{\left(\frac{(q - \Omega^2) g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2} \right)^2 + \left(\frac{2p\Omega g_0}{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2} \right)^2} = \frac{g_0}{\sqrt{(q - \Omega^2)^2 + (2p\Omega)^2}}$$

φ désigne l'angle entre les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{(q-\Omega^2)g_0}{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2} \\ \frac{2p\Omega g_0}{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2} \end{pmatrix}$:

$$\cos(\varphi) = \frac{\frac{(q-\Omega^2)g_0}{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2}}{a} = \frac{q-\Omega^2}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2}}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\frac{2p\Omega g_0}{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2}}{a} = \frac{2p\Omega}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2}}$$

Si on suppose $p > 0$ et $\Omega > 0$, le déphasage peut s'écrire

$$\varphi = \arccos \left(\frac{q-\Omega^2}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2}} \right)$$

En utilisant la relation trigonométrique

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

la solution peut être réécrite sous une autre forme :

$$\begin{aligned} Y_{\text{part}}(t) &= \frac{(q-\Omega^2)g_0}{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2} \sin(\Omega t) - \frac{2p\Omega g_0}{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2} \cos(\Omega t) = \\ &= (a \cos(\varphi)) \sin(\Omega t) - (a \sin(\varphi)) \cos(\Omega t) = \\ &= a (\sin(\Omega t) \cos(\varphi) - \cos(\Omega t) \sin(\varphi)) = a \sin(\Omega t - \varphi) \end{aligned}$$

Finalement, une solution particulière est

$$Y_{\text{part}}(t) = \frac{g_0}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2}} \sin \left(\Omega t - \arccos \left(\frac{q-\Omega^2}{\sqrt{(q-\Omega^2)^2+(2p\Omega)^2}} \right) \right)$$

Pour des données numériques, une vérification de cette dernière formule par *Mathematica* a été effectuée dans le § 2 – 1.

Autre méthode de calcul

Il est possible d'alléger les calculs précédents en faisant appel aux propriétés des nombres complexes. Consultez le document complémentaire suivant:

sur le site <http://www.collegedusud.ch/app/applmaths/>

suivez les liens **Documents Mathematica / Annexes: Equations différentielles**

téléchargez le cahier **2-3_Equa_diff_suppl.nb** et consultez la partie **§ 2.3-S1**

■ 3-ème étape : solution générale de l'équation inhomogène

D'après un théorème précédent, la solution générale de l'équation inhomogène est de la forme

$$Y_{\text{inh}} = Y_{\text{hom}} + Y_{\text{part}} = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) + a \sin(\Omega t - \varphi), \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

où l'expression $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ est définie dans le § 2.2 et $a \sin(\Omega t - \varphi)$ est définie ci-dessus.

La solution générale contient toutes les solutions de l'équation différentielle inhomogène sans se préoccuper des conditions initiales. Un exemple numérique explicite est donné dans le document complémentaire suivant:

sur le site <http://www.collegedusud.ch/app/applmaths/>

suivez les rubriques **Documents Mathematica / Annexes: Equations différentielles**

téléchargez le cahier **2-3_Equa_diff_suppl.nb** et consultez la partie **§ 2.3-S2**

■ 4-ème étape : la solution de l'équation inhomogène qui satisfait les conditions initiales

Pour chaque paire de conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, on peut calculer la valeur des constantes d'intégrations c_1 , c_2 . Il s'agit simplement de résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Pour alléger notre tâche, utilisons *Mathematica*

$$y_{\text{inh}} = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + a \sin(\Omega t - \varphi)$$

■ Oscillations amorties et entretenues avec conditions initiales, cas $p^2 < q$

$$\omega = \sqrt{q - p^2}$$

$$y(t) = e^{-pt} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) + a \sin(\Omega t - \varphi)$$

Exemple numérique

```
p = 2; q = 5; Ω = 2; g0 = 3; y0 = 0; y1 = 0;
```

```
Clear[g]; g[t_] := g0 Sin[Ω t]
```

```
Clear[c1, c2];
```

```
ω = Sqrt[q - p^2];
```

$$y_p[t_] := \frac{g_0}{\sqrt{(q - \Omega^2)^2 + (2 p \Omega)^2}} \sin\left[\Omega t - \text{ArcCos}\left[\frac{q - \Omega^2}{\sqrt{(q - \Omega^2)^2 + (2 p \Omega)^2}}\right]\right];$$

```
y[t_] := e^{-p t} (c1 Cos[ω t] + c2 Sin[ω t]) + y_p[t];
```

```
y[t]
```

$$e^{-2t} (c_1 \cos[t] + c_2 \sin[t]) + \frac{3 \sin\left[2t - \text{ArcCos}\left[\frac{1}{\sqrt{65}}\right]\right]}{\sqrt{65}}$$

```
cc12 = Solve[{y[0] == y0, y'[0] == y1}, {c1, c2}]
```

$$\left\{\left\{c_1 \rightarrow \frac{24}{65}, c_2 \rightarrow \frac{42}{65}\right\}\right\}$$

```
ys[t_] := y[t] /. cc12[[1]];
```

```
ys[t]
```

$$e^{-2t} \left(\frac{24 \cos[t]}{65} + \frac{42 \sin[t]}{65} \right) + \frac{3 \sin\left[2t - \text{ArcCos}\left[\frac{1}{\sqrt{65}}\right]\right]}{\sqrt{65}}$$

Vérification

```
FullSimplify[ys''[t] + 2 p ys'[t] + q ys[t] - g[t]]
```

```

0
Simplify[ys[0]]
0
Simplify[ys'[0]]
0

```

■ Travaux dirigés du § 2.3

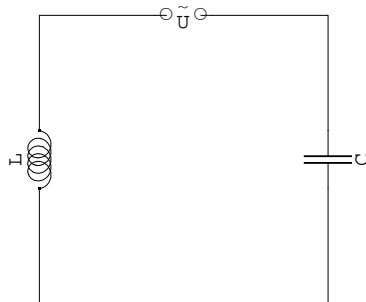
■ 2.3- TD 1

Une masse m est attachée à un ressort de raideur k et libre de se déplacer verticalement. Au repos, la masse se trouve en $y = 0$. On amène cette masse en $y = y_0$ et, au temps $t = 0$, on lâche le système sans vitesse initiale. On néglige la résistance de l'air au déplacement ainsi que la masse du ressort.

- Etablir l'équation différentielle de la position $y(t)$ de cette masse.
- Résoudre l'équation différentielle avec la méthode donnée dans le cours.
Indication: chercher s'il existe une solution réelle de la forme $y(t) = \dots$
- [Facultatif] Résoudre l'équation différentielle avec la méthode donnée dans le supplément § 2-2 S1 qui fait appel aux nombres complexes.

■ 2.3- TD 2 Oscillations entretenues non amorties ($p = 0$)

On considère le circuit (idéalisé) LC entretenu par une tension du type $U(t) = \hat{U} \sin(\Omega t)$.

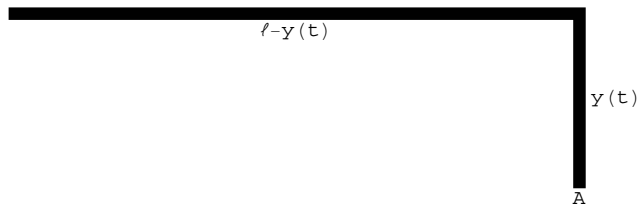


- Etablir l'équation différentielle de l'intensité $I(t)$.
- Résoudre l'équation différentielle établie en $a)$ avec les conditions initiales $I(0) = I_0$ et $I'(0) = I_1$ au moyen de la méthode donnée dans le cours.
Donner une représentation graphique de $I(t)$ pour
 $L = 100 \text{ H}$, $C = 10^{-4} \text{ F}$, $\Omega = 0.1 \text{ s}^{-1}$, $\hat{U} = 3000 \text{ V}$, $I_0 = 0$ et $I_1 = 1 \frac{\text{A}}{\text{s}}$.
- [Facultatif] Résoudre l'équation différentielle établie en $a)$ avec les conditions initiales $I(0) = I_0$ et $I'(0) = I_1$ au moyen de la méthode donnée dans le supplément § 2-2 S1 qui fait appel aux nombres complexes.

■ 2.3- TD 3 Glissement d'une corde avec frottement

Une corde de longueur ℓ se trouve dans la situation initiale suivante: une partie de longueur $\ell - y_0$ est posée horizontalement sur un toit tandis qu'une longueur y_0 pend dans le vide. A l'instant $t = 0$, on la lâche et, sous l'effet de la

pesanteur, elle se met à glisser:



Nous tenons compte du frottement de la partie horizontale sur le toit. On donne le coefficient de frottement de glissement μ . Etablissons l'équation différentielle.

La force qui s'exerce sur la corde est la force de pesanteur qui s'exerce sur la partie qui pend. Notons m la masse totale de la corde. La pesanteur vaut

$$F_1 = \frac{Y}{l} m g$$

La force de frottement est égale à μ fois le poids de la partie horizontale

$$F_2 = -\mu \frac{l - Y}{l} m g$$

L'équation de Newton

$$F_1 + F_2 = m Y''$$

conduit à l'équation différentielle avec conditions initiales

$$\boxed{\begin{aligned} Y'' - \frac{(1 + \mu) g}{l} Y &= -\mu g \\ Y(0) = Y_0; \quad Y'(0) &= 0 \end{aligned}}$$

Résolvez l'équation différentielle avec conditions initiales.

Indication : l'équation différentielle possède une solution particulière constante.

■ 2.3- TD 4 Circuit RCL entretenu

- a) A partir des lois de la physique, expliquez pourquoi l'équation différentielle du circuit RCL série entretenu est

$$L I'' + R I' + \frac{1}{C} I = \Omega U_0 \cos(\Omega t)$$

Ω désigne ici la fréquence du générateur.

- b) [Avec *Mathematica*] Montrez que l'équation différentielle admet la solution particulière stationnaire suivante

$$I_\infty(t) =$$

$$\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \left(\frac{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \cos(\Omega t) + \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} \sin(\Omega t) \right)$$