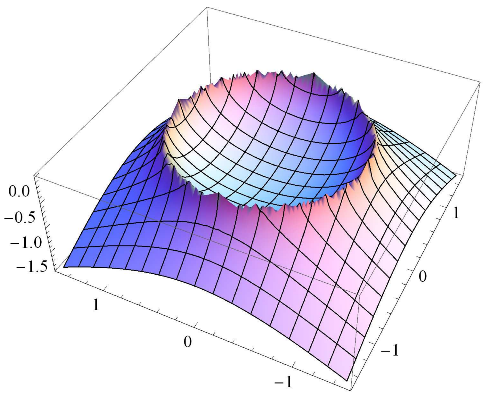
Collège du Sud
2-ème année OS PAM
3-ème année OC AM

Applications des mathématiques

Introduction à Mathematica



Edition 2011/2012

Marcel Délèze, Eugène Pasquier
www.collegedusud.ch/app/applmaths/

§ 1 Aperçu

Le but de cette première partie est de parcourir les principales possibilités du langage *Mathematica*. Puisque, dans un premier temps, il ne s'agit que d'un rapide survol, nous nous contenterons d'exhiber des exemples sans donner d'explications techniques.
Nous montrerons que *Mathematica* est un langage qui permet
- d'effectuer des calculs numériques;
- d'effectuer des calculs symboliques;
- de réaliser des graphiques;
- d'écrire des programmes;
- de faire appel à des bibliothèques de programmes;
- d'éditer des documents scientifiques.

Palette

Pour disposer d'une palette de symboles que nous utiliserons souvent, affichez sur la droite de l'écran la palette "BasicInput" ; pour ce faire, passez par le menu
"Palettes / BasicMathInput".

Evaluation

Exécutez les inputs qui suivent. Les input sont écrits en caractère gras; le premier input est "2^100".
Pour évaluer un input,
- actionnez la touche **<Enter>** à droite du pavé numérique ou
- actionnez simultanément les touches <MAJ> et <RETURN>.

Par exemple,

4 + 6

10

§ 1.1 Calculs numériques

Mathematica intègre toutes les fonctions mathématiques usuelles qui s'appliquent à des nombres. Voici quelques exemples.

Pour élever 2 à la puissance 100 (en utilisant le clavier) :

2^100

1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376

Pour effectuer le même calcul, on peut utiliser la palette (symbole exposant). La touche <TAB> permet de passer de la base à l'exposant.

$\mathbf{2^{100}}$

1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376

Pour écrire la "racine carrée de 2", on peut utiliser la palette:

$\sqrt{\mathbf{2}}$

$\sqrt{2}$

Pour demander la valeur numérique d'une expression **expr**, on utilise la fonction **N[expr]**. Le crochet s'obtient en actionnant simultanément les deux touches <Alt Gr> et <[> (ou les trois touches <Ctrl>, <Alt> et <[>).

N$\left[\sqrt{\mathbf{2}}\right]$

1.41421

Par défaut, la valeur numérique est calculée avec environ 16 chiffres caractéristiques (valeur stockée en mémoire) et affichée avec environ 6 chiffres caractéristiques. Il faut donc distinguer
$\sqrt{2}$ qui désigne la valeur exacte;
1.414213562373095 qui est la valeur numérique calculée et mémorisée;
1.41421 qui est la valeur numérique affichée.

Pour obtenir le nombre π, on peut aussi utiliser la palette :

```
N[π]
```

```
3.14159
```

Le symbole de la multiplication est l'espace (ou l'étoile):

```
N[3 π]
```

```
9.42478
```

La division peut être désignée par la barre oblique du clavier :

```
5 / 7
```

$\frac{5}{7}$

Il s'agit là de la valeur exacte du nombre rationnnel dont on peut demander une valeur numérique approchée:

```
N[5 / 7]
```

```
0.714286
```

La division peut aussi être indiquée au moyen de la palette

$N\left[\frac{5}{7}\right]$

```
0.714286
```

Mathematica est capable de faire des calculs à n'importe quelle précision. La fonction **N[expr, n]** donne la valeur numérique de *expr* à *n* chiffres significatifs pour $n \geq 17$:

$N\left[\sqrt{2}, 30\right]$

```
1.41421356237309504880168872421
```

```
N[π, 40]
```

```
3.141592653589793238462643383279502884197
```

$N\left[\frac{5}{7}, 50\right]$

```
0.71428571428571428571428571428571428571428571428571
```

L'unité d'angle par défaut est le radian:

```
N[Cos[1]]
```

```
0.540302
```

mais on peut aussi calculer en degrés; le symbole "degré" se trouve
- soit sur le clavier, en haut à gauche;
- soit dans la palette "BasicInput".

```
N[Sin[20 °]]
```

```
0.34202
```

Voici la liste des 12 premiers nombres premiers:

```
Table[Prime[n], {n, 1, 12}]
```

```
{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}
```

Voici la décomposition d'un entier en facteurs premiers:

```
FactorInteger[2 434 500]
```

```
{{2, 2}, {3, 2}, {5, 3}, {541, 1}}
```

Vérifions le résultat obtenu:

$2^2\ 3^2\ 5^3\ 541^1$

```
2 434 500
```

Mathematica peut calculer une somme de termes. Par exemple, la somme des carrés des 100 premiers entiers positifs $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 99^2 + 100^2$ s'écrit comme suit (pour obtenir le symbole "somme", on peut utiliser la palette "BasicInput") :

$$\sum_{i=1}^{100} i^2$$

338 350

Cette formule signifie que, dans l'expression i^2, il faut donner à i les valeurs successives 1, 2, 3, .., 99, 100 puis additionner tous les termes obtenus.

§ 1.2 Calculs symboliques

Mathematica peut aussi travailler avec les symboles, c'est-à-dire avec des lettres comme en calcul algébrique. Pour effectuer des produits et des exponentiations:

```
Expand[(a - 2 b) (a + b)^3]
```

$\{81 + 27\,b - 27\,b^2 - 15\,b^3 - 2\,b^4,\ -2\,b^4,\ -2\,b^4\}$

Pour factoriser une expression:

```
Factor[x^4 - 1]
```

$(-1 + x)\ (1 + x)\ (1 + x^2)$

Pour réduire au dénominateur commun:

$$\texttt{Together}\left[\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right]$$

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

$\left\{\frac{3\,b}{3 + b},\ 0,\ 0\right\}$

Pour simplifier une expression:

$$\texttt{Simplify}\left[\frac{1}{4\,(-1 + x)} - \frac{1}{4\,(1 + x)} - \frac{1}{2\,(1 + x^2)}\right]$$

$\frac{1}{-1 + x^4}$

Pour extraire le numérateur et le dénominateur d'une fraction rationnelle:

$$\texttt{Numerator}\left[\frac{\frac{3\,x}{2} - 7}{x^2 - \frac{3}{4}}\right]$$

$-7 + \frac{3\,x}{2}$

$$\texttt{Denominator}\left[\frac{\frac{3\,x}{2} - 7}{x^2 - \frac{3}{4}}\right]$$

$-\frac{3}{4} + x^2$

Pour le quotient de deux polynômes, **PolynomialQuotient[...]** donne le quotient tandis que **PoynomialRemainder[...]** donne le reste. On doit donner trois arguments: le dividende, le diviseur et la variable.

```
PolynomialQuotient[x^3 - 2 x^2 + 3 x - 4, x^2 - 1, x]
```

$-2 + x$

```
PolynomialRemainder[x^3 - 2 x^2 + 3 x - 4, x^2 - 1, x]
```

$-6 + 4\,x$

Vérifions que (quotient)·(diviseur) + (reste) = (dividende)

```
Expand[(-2 + x) (x^2 - 1) + (-6 + 4 x)]
```

$-4 + 3\,x - 2\,x^2 + x^3$

Le dernier argument indique quelle est la variable. Par exemple,

```
PolynomialQuotient[a^3 + a^2 b + b^2, a - b, a]
```

PolynomialQuotient::ivar : {3, 0, 0} is not a valid variable. ≫

$\texttt{PolynomialQuotient}\left[\{27 + 9\,b + b^2,\ b^2,\ b^2\},\ \{3 - b,\ -b,\ -b\},\ \{3,\ 0,\ 0\}\right]$

PolynomialQuotient$[a^3 + a^2\, b + b^2,\ a - b,\ b]$

PolynomialQuotient::poly : $\{27 + 9\, b + b^2, b^2, b^2\}$ is not a polynomial. ≫

PolynomialQuotient$[\{27 + 9\, b + b^2,\ b^2,\ b^2\},\ \{3 - b,\ -b,\ -b\},\ b]$

PolynomialQuotient$[a^3 + a^2\, b + b^2,\ a - b,\ x]$

PolynomialQuotient::poly : $\{27 + 9\, b + b^2, b^2, b^2\}$ is not a polynomial. ≫

PolynomialQuotient$[\{27 + 9\, b + b^2,\ b^2,\ b^2\},\ \{3 - b,\ -b,\ -b\},\ x]$

Il est possible de définir des fonctions et de composer plusieurs commandes

Clear[f];

f[x_] := $\dfrac{x^2 - 3\, x + 8}{2\, x - 3}$**;**

PolynomialQuotient[Numerator[f[x]], Denominator[f[x]], x]

$-\frac{3}{4} + \frac{x}{2}$

PolynomialRemainder[Numerator[f[x]], Denominator[f[x]], x]

$\frac{23}{4}$

Mathematica est capable de résoudre des équations numériques et littérales ainsi que des inéquations. Avec la commande **Reduce[...]**, le premier argument est l'équation; pour former une équation comme $x^2 - 7\, x - 2 == 0$, il faut répéter de symbole d'égalité. Le deuxième argument, ici **x**, désigne l'inconnue. Le troisième argument, **Reals**, signifie "sur l'ensemble des nombres réels":

Reduce$[x^2 - 7\, x - 2 == 0,\ x,\ \text{Reals}]$

$x == \frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{57}\right)\ ||\ x == \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{57}\right)$

Le symbole || signifie "**ou**".

Reduce$[x^2 + 1 == 0,\ x,\ \text{Reals}]$

False

La réponse signifie que l'équation n'est pas vérifiée quel que soit **x** réel; en d'autres termes, que l'ensemble des solutions est vide.

L'équation peut aussi être littérale:

Reduce$[x^2 + m\, x - 2 == 0,\ x,\ \text{Reals}]$

False

Reduce$[x^2 + m\, x - 2 == 0,\ m,\ \text{Reals}]$

Reduce::ivar : {1, 1, 0} is not a valid variable. ≫

$$\text{Reduce}\Big[\Big\{\{-2 + x + x^2,\ -2 + x + x^2,\ -2 + x^2\},\ \Big\{-2 + x + x^2,\ -2 - \frac{x}{2} + x^2,\ -2 + \frac{\sqrt{3}\ x}{2} + x^2\Big\},\ \Big\{-2 + x + x^2,\ -2 - \frac{x}{2} + x^2,\ -2 - \frac{\sqrt{3}\ x}{2} + x^2\Big\}\Big\} == 0,$$
$$\Big\{\{1,\ 1,\ 0\},\ \Big\{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big\},\ \Big\{1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big\}\Big\},\ \text{Reals}\Big]$$

Le symbole && signifie "**et**".

Reduce[...] permet aussi de résoudre des inéquations:

Reduce$[x^2 - 7\, x - 2 > 0,\ x,\ \text{Reals}]$

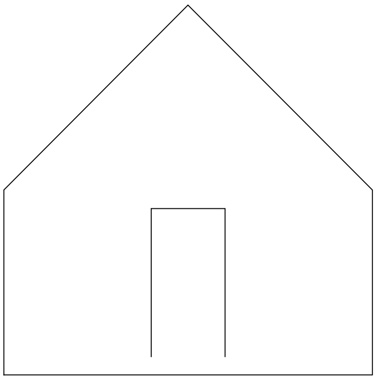
$x < \frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{57}\right)\ ||\ x > \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{57}\right)$

D'autres précisions seront apportées dans le § 2 *Premiers principes*.

§ 1.3 Graphiques

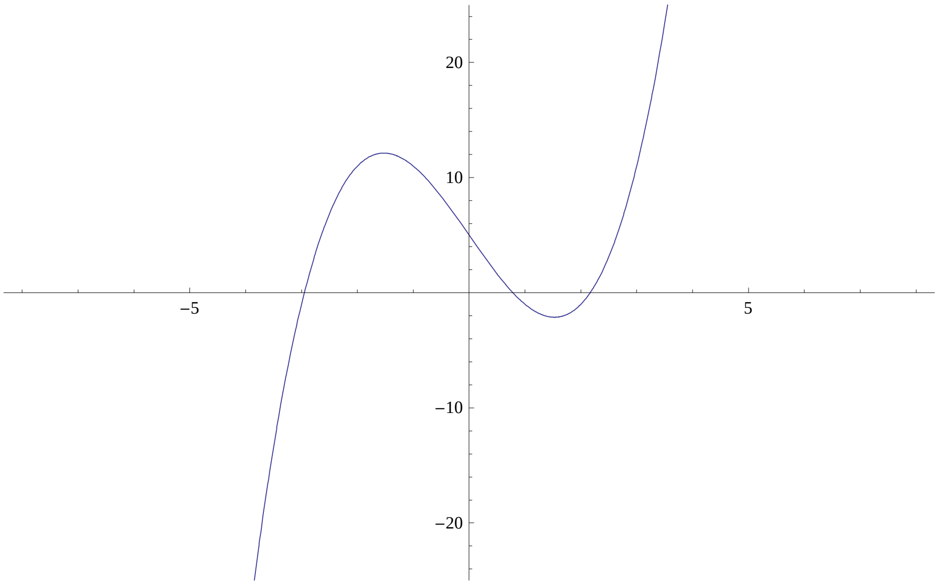
Voici un graphique constitué de deux lignes polygonales, la première étant fermée et la deuxième ouverte:

```
Show[Graphics[
        {Line[{{0, 0}, {0, 1}, {1, 2}, {2, 1}, {2, 0}, {0, 0}}],
            Line[{{0.8, .1}, {0.8, .9}, {1.2, .9}, {1.2, .1}}]},
        AspectRatio → Automatic], ImageSize -> {400, 200}]
```



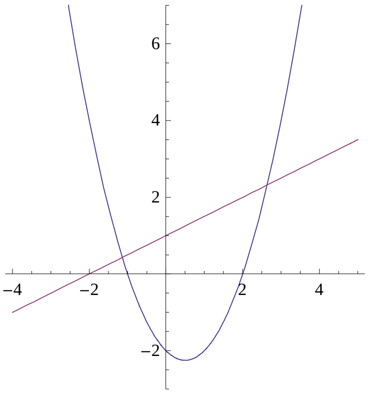
Voici le graphique d'une fonction à une variable:

```
Plot[x^3 - 7 x + 5, {x, -8, 8}, PlotRange -> {Automatic, {-25, 25}}]
```



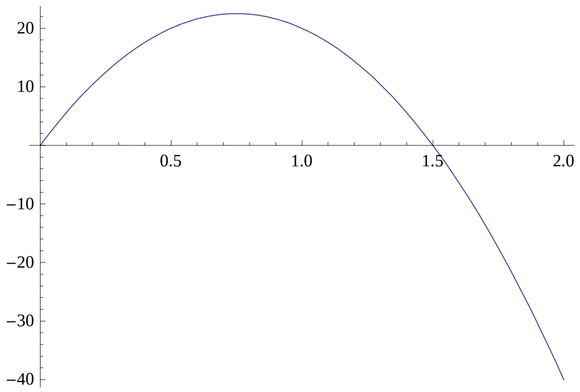
On peut superposer les graphiques de deux fonctions:

```
Plot[{x^2 - x - 2, 1/2 x + 1}, {x, -4, 5},
    PlotRange → {-3, 7},
    AspectRatio → Automatic, ImageSize -> {400, 200}]
```



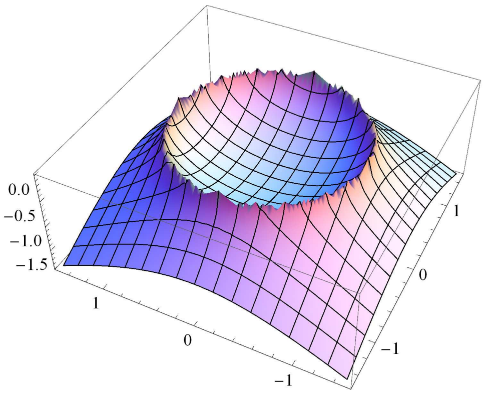
Graphique d'une courbe paramétrée (horaire d'un mobile):

```
Clear[x, y];
x[t_] := 0.5 t;
y[t_] := 30 t - 10 t^2
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 4}, AspectRatio -> .7, ImageSize -> {400, 200}]
```



Graphique d'une fonction de deux variables:

```
Plot3D[-Sqrt[Abs[1 - x^2 - y^2]], {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5},
    PlotPoints → 28,
    ViewPoint -> {-2, -1, 2}, ImageSize → {400, 200}]
```



Il est aussi possible de réaliser une animation, c'est-à-dire un mouvement représenté par une liste d'images (voir § 2).

§ 1.4 Programmation

Mathematica est aussi un langage de programmation. En particulier, l'utilisateur peut créer de nouvelles commandes. Voici par exemple comment on peut définir la moyenne arithmétique d'une liste de nombres:

```
moyenne[a_List] := N[Apply[Plus, a] / Length[a]]
```

L'instruction précédente n'a effectué aucun calcul, mais elle a défini une nouvelle commande dénommée "moyenne". Maintenant, nous pouvons utiliser cette nouvelle commande autant de fois que désiré:

```
moyenne[{3.7, 4.3, 5.2, 5.6}]
```

```
4.7
```

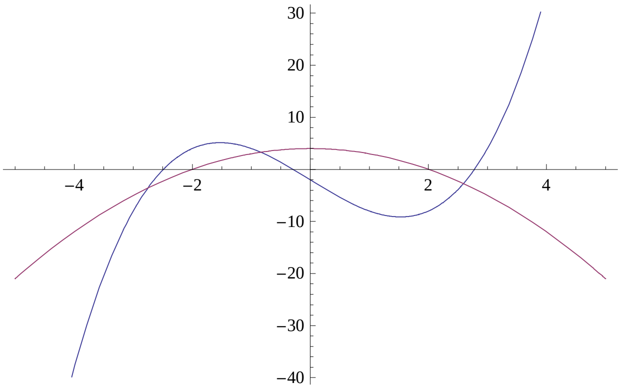
```
moyenne[{4.75, 5, 4.75}]
```

```
4.83333
```

Parmi les notions importantes de *Mathematica*, il faut mentionner les fonctions et les listes ("moyenne" est une fonction qui s'applique à une liste).

Voici un problème dont la résolution fera appel à deux fonctions:
"Déterminez graphiquement et par calcul les abscisses des points d'intersection des courbes $y = x^3 - 7x - 2$ et $y = 4 - x^2$."

```
Clear[f, g, x];
f[x_] := x^3 - 7 x - 2;
g[x_] := 4 - x^2;
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -5, 5}, ImageSize -> {400, 200}]
```



En lisant le graphique, on peut observer que les deux courbes se coupent en trois points dont les abscisses valent approximativement -2.8, -0.8 et 2.6

Mathematica peut calculer précisément les abscisses des points d'intersection

```
Reduce[f[x] == g[x], x, Reals]
```

```
x == Root[-6 - 7 #1 + #1^2 + #1^3 &, 1] ||
  x == Root[-6 - 7 #1 + #1^2 + #1^3 &, 2] || x == Root[-6 - 7 #1 + #1^2 + #1^3 &, 3]
```

Dans une telle situation, on peut demander la valeur numérique des solutions

```
N[Reduce[f[x] == g[x], x, Reals]]
```

```
x == -2.75153 || x == -0.841083 || x == 2.59261
```

§ 1.5 Suppléments ou fichiers d'extension (Packages)

L'utilisateur peut créer de nouvelles commandes et les ajouter à *Mathematica*. Des groupes de commandes supplémentaires peuvent être enregistrées dans des fichiers dénommés "suppléments" ou "fichiers d'extension" (ou "Packages"). L'utilisateur peut ensuite y faire appel.

§ 1.6 Edition de documents scientifiques

Mathematica permet d'écrire des documents qui contiennent des textes, des calculs et des graphiques. Le cours que vous lisez en est un exemple.

Exercices

- **Exercice 1-1**

a) Calculez la valeur numérique des expressions suivantes.
Pour les entiers, on demande la valeur exacte;
pour les nombres non entiers, on demande la valeur numérique (à la précision par défaut).

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$\sin(72\,°)$

$$\frac{3\pi}{4}$$

$(3*1+1) + (3*2+1) + (3*3+1) + ... + (3*20+1)$

b) Le nombre suivant est-t-il premier ?

$2^{103}-1$

- **Exercice 1-2**

a) Développez les expressions suivantes puis trouvez les règles qui permettent de déterminer les coefficients de la ligne suivante (il s'agit du triangle de Pascal) :

$(a+b)^2$
$(a+b)^3$
$(a+b)^4$
$(a+b)^5$
$(a+b)^6$

b) Réduisez l'expression suivante au dénominateur commun

$$\frac{4}{1-x} - \frac{5}{1+x} + \frac{3x}{x^2-1} - \frac{x^2}{x^2+x} + \frac{2x}{x^2-x}$$

c) Résolvez l'équation

$$\frac{4}{1-x} - \frac{5}{1+x} + \frac{3x}{x^2-1} - \frac{x^2}{x^2+x} + \frac{2x}{x^2-x} = 0$$

- **Exercice 1-3**

a) Dessinez une échelle verticale comportant 5 échelons horizontaux.

b) Résolvez graphiquement l'équation suivante, c'est-à-dire superposez dans un même repère les graphiques des fonctions du membre de gauche et du membre de droite:

$$\frac{3x}{x-1} = x^2 - x - 6$$

c) Résolvez par calcul l'équation précédente.

d) Dessinez la trajectoire du mobile dont l'horaire est

$x(t) = 4t,$
$y(t) = 6t - 9.8t^2$
$0 \leq t \leq 1$

- **Exercice 1-4**

Dans un même repère, représentez graphiquement les deux courbes

$y = x^2 - 3x - 1$
$y = -x^2 + x + 3$

Calculer les abscisses des points d'intersection.