§ 2 Premiers principes

Mathematica se compose
- * d'un noyau (KERNEL) qui effectue les calculs; le noyau reconnaît des milliers de commandes et fonctions;
- * d'une interface (FRONT-END) qui s'occupe d'éditer les entrées et les sorties;
- * de suppléments (PACKAGES) où sont stockés des commandes supplémentaires ou des fonctions définies par les utilisateurs.

■ Directives

Dans un nouveau cahier (NOTEBOOK), évaluez toutes les cellules du présent cahier qui sont des entrées (INPUTS). Les inputs sont reconnaissables à leur format. Par exemple, dans les deux cellules suivantes, $\sqrt{12}$ (en caractères gras) est un input tandis que 2*$\sqrt{3}$ est l'output correspondant :

$$\sqrt{\mathbf{12}}$$

$$2\sqrt{3}$$

Pour faciliter l'entrée des données, il est recommandé de charger une palette, par exemple "BasicMathInput".

Pour évaluer l'input en cours d'édition, actionnez la touche <Enter> du pavé numérique ou actionnez simultanément les touches "Majuscule" et "Return".
Pour évaluer tout le cahier, utilisez le menu "Noyau / Evaluation / Evaluer le cahier".
Enregistrez le cahier sous le nom *Premiers principes.*

■ Opérations arithmétiques

Les symboles de l'addition et de la soustraction sont + et -;
le symbole de la multiplication est l'étoile * ou l'espace:

2 * 3 * 4 * 5 - 2 × 3 × 4 × 5

```
0
```

34 - 3 × 4

```
22
```

Le symbole de la division est la barre oblique du clavier ou la barre horizontale de la palette.

$$\mathbf{4 / 5 - \frac{4}{5}}$$

```
0
```

Le symbole de l'élévation à la puissance est l'accent circonflexe du clavier ou l'exposant de la palette :

$$\mathbf{2\,\hat{}\,10 - 2^{10}}$$

```
0
```

En principe, *Mathematica* cherche à donner les valeurs exactes des calculs:

$$\sqrt{32} - \frac{4}{7} + 2^7 - \frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{892}{7} - \frac{3}{2\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}$$

$$\text{Simplify}\left[\sqrt{32} - \frac{4}{7} + 2^7 - \frac{3}{\sqrt{8}}\right]$$

$$\frac{892}{7} + \frac{13}{2\sqrt{2}}$$

■ Valeurs numériques approchées

On peut obtenir une valeur numérique approchée d'une expression avec la fonction **N[expr]**, par exemple

$$2^{100}$$

1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376

$$\text{N}\left[2^{100}\right]$$

$$1.26765 \times 10^{30}$$

$$\frac{2}{7} + \sqrt{5}$$

$$\frac{2}{7} + \sqrt{5}$$

$$\text{N}\left[\frac{2}{7} + \sqrt{5}\right]$$

2.52178

La valeur numérique est calculée avec une précision supérieure à celle qui est affichée; c'est pourquoi la différence suivante n'est pas nulle:

$$\text{N}\left[\frac{2}{7} + \sqrt{5}\right] - 2.52178$$

$$2.26321 \times 10^{-6}$$

Les nombres réels ont une représentation interne de 16 chiffres significatifs dont seuls les premiers sont affichés. Si on désire voir plus de chiffres, on peut utiliser la fonction **NumberForm[expr, n]** où *n* indique le nombre de chiffres désirés; par exemple

$$\text{NumberForm}\left[\text{N}\left[\frac{2}{7} + \sqrt{5}\right], 10\right]$$

2.521782263

La fonction **N[...]** concerne le calcul et la représentation interne du résultat tandis que **NumberForm[...]** ne concerne que l'affichage du nombre. Si on demande d'afficher plus de chiffres qu'il a été calculé, seuls les chiffres significatifs sont affichés:

$$\text{NumberForm}\left[\text{N}\left[\frac{2}{7} + \sqrt{5}\right], 100\right]$$

2.521782263214075

Si on désire calculer avec plus de 16 chiffres significatifs, on peut utiliser la fonction **N[expr, n]** où *n* désigne le nombre de chiffres significatifs désirés :

```
N[2/7 + √5, 50]
```

2.5217822632140754106948879544455619497263326453258

Lorsque le nombre de chiffres significatifs dépasse 16, ils sont automatiquement tous affichés. En d'autres termes, pour $n \geq 17$, **N[expr,n]** et **NumberForm[N[expr,n],n]** sont équivalents.

Lorsque le nombre de chiffres significatifs est inférieur à 16, l'expression est quand même évaluée avec 16 chiffres caractéristiques. Par conséquent, pour $n \leq 16$, il faut distinguer la valeur interne qui est une approximation numérique à 16 chiffres caractéristiques et la valeur affichée à l'écran dont le nombre de chiffres caractéristiques est généralement plus petit que 16:

```
N[2/7 + √5]          (* la valeur est affichée à 6 chiffres significatifs;
la valeur interne est à 16 chiffres *)
```

2.52178

```
N[2/7 + √5, 2]          (* la valeur est affichée à 2 chiffres significatifs;
la valeur interne est à 16 chiffres *)
```

2.5

```
2.5 - N[2/7 + √5]          (* le calcul est effectué avec les valeurs internes à 16 chiffres *)
```

-0.0217823

```
N[2/7 + √5, 2] - 2.52178          (* le calcul est effectué avec les valeurs internes à 16 chiffres *)
```

2.26321×10^{-6}

```
N[2/7 + √5, 2] - 2.5217822632140754`
  (* le calcul est effectué avec les valeurs internes à 16 chiffres *)
```

0.

```
NumberForm[N[2/7 + √5], 2]
```

2.5

■ Aide thématique et aide par nom (Help)

Comme il existe des milliers de commandes *Mathematica*, il est nécessaire de savoir consulter l'aide. Les moyens les plus couramment utilisés sont les suivants :

* On peut effectuer une recherche thématique en utilisant le centre de documentation du menu *Aide*.
  Cette façon de faire est surtout utile lorsqu'on ne connaît pas le nom de la fonction cherchée.

* On peut sélectionner le nom de la commande *Mathematica* puis taper *F1*.
* Pour obtenir de l'aide sur une commande dont on connaît le nom, il est possible d'utiliser la commande "?".

Par exemple, pour obtenir de l'aide sur **Plot**

```
? Plot
```

Plot[f, {x, x_{min}, x_{max}}] generates a plot of f as a function of x from x_{min} to x_{max}.
Plot[{f_1, f_2, …}, {x, x_{min}, x_{max}}] plots several functions f_i. ≫

* On peut appliquer la fonction **Options** à la commande *Mathematica* (par exemple *Options[Plot]*)

```
Options[Plot]
```

```
{AlignmentPoint → Center, AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → True,
 AxesLabel → None, AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → {}, Background → None,
 BaselinePosition → Automatic, BaseStyle → {}, ClippingStyle → None,
 ColorFunction → Automatic, ColorFunctionScaling → True, ColorOutput → Automatic,
 ContentSelectable → Automatic, CoordinatesToolOptions → Automatic,
 DisplayFunction :→ $DisplayFunction, Epilog → {}, Evaluated → Automatic,
 EvaluationMonitor → None, Exclusions → Automatic, ExclusionsStyle → None,
 Filling → None, FillingStyle → Automatic, FormatType :→ TraditionalForm,
 Frame → False, FrameLabel → None, FrameStyle → {}, FrameTicks → Automatic,
 FrameTicksStyle → {}, GridLines → None, GridLinesStyle → {}, ImageMargins → 0.,
 ImagePadding → All, ImageSize → Automatic, ImageSizeRaw → Automatic, LabelStyle → {},
 MaxRecursion → Automatic, Mesh → None, MeshFunctions → {#1 &}, MeshShading → None,
 MeshStyle → Automatic, Method → Automatic, PerformanceGoal :→ $PerformanceGoal,
 PlotLabel → None, PlotPoints → Automatic, PlotRange → {Full, Automatic},
 PlotRangeClipping → True, PlotRangePadding → Automatic, PlotRegion → Automatic,
 PlotStyle → Automatic, PreserveImageOptions → Automatic, Prolog → {},
 RegionFunction → (True &), RotateLabel → True, Ticks → Automatic,
 TicksStyle → {}, WorkingPrecision → MachinePrecision}
```

■ Fonctions prédéfinies

Recherchez dans l'aide les fonctions suivantes:

Sqrt
Floor
Round
Abs
ArcSin
ArcTan
N

Les arguments d'une fonction se mettent entre crochets [...].
Tous les symboles de *Mathematica* commencent par une lettre majuscule.

```
Floor[π]
```

```
3
```

```
Floor[-π]
```

```
-4
```

Dans les fonctions **Sin**, **Cos**, **Tan**, les angles doivent être donnés <u>en radians</u>. Par exemple,

```
Sin[36]
```

```
Sin[36]
```

```
N[Sin[36]]
```

```
-0.991779
```

est la valeur du sinus de 36 radians.

Si on désire calculer le sinus d'un angle donné en degrés, le symbole "degré" doit être indiqué:

```
Sin[36 °]
```

$$\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}$$

Pour obtenir une valeur numérique, au lieu d'utiliser la fonction **N[...]**, on peut écrire l'angle avec un point décimal :

```
Sin[36. °]
```

```
0.587785
```

Les fonctions **ArcSin**, **ArcCos**, **ArcTan** donnent des résultats <u>en radians</u>.

```
ArcSin[0.587785]
```

```
0.628318
```

Pour obtenir des résultats en degrés, on peut utiliser la règle de conversion

$$\boxed{\pi\ \ (\text{radians})\ \ =\ \ 180\,°}$$

Par exemple, l'arc sinus de 0.587785, exprimé en degrés, est

```
ArcSin[0.587785] / π * 180
```

```
36.
```

■ Variables et assignations

Une variable est une zone de la mémoire - désignée par un nom - où l'on stocke une valeur. Il est d'usage que les symboles définis par l'utilisateur commencent par une lettre minuscule.
Pour assigner une valeur à une variable, on utilise le symbole d'égalité :

$$x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$y = \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{12}$$

Voici quelques conventions d'écriture:

rayon	est un nom valide de variable
x2	est le nom d'une variable
2x	signifie 2*x
xy	est le nom d'<u>une</u> variable (pas d'espace entre x et y)
x y	signifie x*y (remarquez l'espace entre x et y)
x^2y	signifie (x^2)*y

La valeur attribuée à une variable est immédiate et permanente : elle demeure jusqu'à la prochaine assignation ou jusqu'à la fin de la session en cours.

```
x
```

$$\sqrt{2}$$

```
x = 5
```

```
5
```

```
x
```

```
5
```

Pour ôter des assignations, on utilise la fonction **Clear[symbol1, symbol2, ...]** :

```
Clear[x, y]
```

```
x
```

```
x
```

Il est recommandé d'ôter les assignations qui ne sont plus utilisées afin de ne pas interférer avec des calculs ultérieurs.

$$r = \frac{1}{17}\left(3^{12} - 1\right)$$

$$\frac{531440}{17}$$

```
N[r, 6]
```

```
31261.2
```

```
Clear[r]
```

■ Représentation interne

Il faut distinguer, entre autres,

les nombres entiers tels que -145

les nombres rationnels tels que $\frac{43}{7}$

les nombres réels exacts tels que π ou $\sqrt{3}$

les nombres réels en virgule flottante tels que 13. ou 0.3 ou 1.427 10^{-5};

(remarquez la présence du point décimal).

Les nombres entiers et rationnels sont représentés dans la mémoire de l'ordinateur d'une manière exacte (sans approximation). Les opérations sur les entiers et sur les nombres rationnels sont effectuées d'une manière exacte:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$10^{20} + 1 - 10^{20}$$

$$1$$

Par contre, les nombres en virgule flottante sont représentés avec une erreur d'arrondi. La mémoire de l'ordinateur étant finie, il s'ensuit que la partie mantisse et la partie exposant sont nécessairement finies. Par défaut, la partie mantisse comporte environ 16 chiffres décimaux. Les opérations effectuées avec ces nombres accroissent encore ces erreurs (erreurs d'opérations, erreurs propagées).

$$10^{20} + 1. - 10^{20}$$

```
0.
```

Distinguez, dans les calculs qui suivent, les valeurs exactes des valeurs numériques approchées:

$\pi + 3$

$3 + \pi$

$\pi + 3.$

6.14159

$\sqrt{60 + \frac{1}{2}}$

$\frac{11}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{60.5}$

7.77817

$x = N\left[\sqrt{60.5}, 40\right]$

7.77817

Dans l'expression précédente, il faut y voir deux calculs successifs:

d'abord, l'expression $\sqrt{60.5}$ est calculée avec une précision standard de 16 chiffres caractéristiques;

ensuite, le système tente d'évaluer le résultat à 40 chiffres.

La précision ayant été perdue, elle ne peut plus être retrouvée. La réponse est calculée à 16 chiffres caractéristiques puis affichée avec 6 chiffres caractéristiques. On peut avoir accès à toutes les décimales calculées

```
NumberForm[x, 100]
```

7.778174593052023

Pour obtenir un résultat plus précis, il faut partir d'une expression qui a une valeur exacte:

$N\left[\sqrt{60 + \frac{1}{5}}, 40\right]$

7.758865896508329264191061445764610110214

$\sqrt{12}$

$2\sqrt{3}$

$\text{Sin}\left[\frac{\pi}{6}\right]$

$\frac{1}{2}$

```
ArcCos[0.5]
```

1.0472

$\text{ArcCos}\left[\frac{1}{2}\right]$

$\frac{\pi}{3}$

■ Listes

La liste est une structure de données très courante. Une liste peut représenter un ensemble d'éléments :

```
chiffresPairs = {0, 2, 4, 6, 8}
```

```
{0, 2, 4, 6, 8}
```

Un triangle peut être représenté par les coordonnées de ses trois sommets :

```
triangle = {{0, 0}, {3, 4}, {-1, 1}}
```

```
{{0, 0}, {3, 4}, {-1, 1}}
```

Des fonctions permettent de générer et de traiter les listes:

```
cube = Table[i^3, {i, -2, 5}]
```

```
{-8, -1, 0, 1, 8, 27, 64, 125}
```

Pour extraire un élément d'une liste, on utilise le double crochet; par exemple pour extraire le 3-ème élément de la liste chiffresPairs,

```
chiffresPairs[[3]]
```

```
4
```

```
triangle[[2]]
```

```
{3, 4}
```

```
cube[[1]]
```

```
-8
```

Il est aussi possible d'extraire plusieurs éléments; par exemple pour extraire les éléments numéros 1 et 3 de la liste chiffresPairs,

```
chiffresPairs[[{1, 3}]]
```

```
{0, 4}
```

```
triangle[[{2, 3}]]
```

```
{{3, 4}, {-1, 1}}
```

```
cube[[{2, 4, 6}]]
```

```
{-1, 1, 27}
```

Pour créer une liste, on peut utiliser la commande suivante:

```
? Table
```

```
Table[expr, {imax}] produit une liste de imax copies de expr. Table[expr, {i, imax}]
  produit une liste des valeurs de expr lorsque i va de 1 à imax. Table[expr,
  {i, imin, imax}] commence à i = imin. Table[expr, {i, imin, imax, di}] utilise
  des incréments di. Table[expr, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ... ] donne
  une liste imbriquée. La liste associée à i est la liste la plus extérieure.
```

Par exemple, formons la suite arithmétique de premier terme 3, de raison 4 et comportant 15 termes:

```
s = Table[3 + 4 i, {i, 0, 14}]
```

```
{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59}
```

■ Exercice 2-1

Formez les listes suivantes:

$a = \{11, 16, 21, 26, \ldots\}$ (20 termes)

$b = \{3, 6, 12, 24, 48, \ldots\}$ (12 termes)

c = ensemble des valeurs prises par l' expression $\cos\left(k \frac{2\pi}{7}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Etant donné le rôle central que joue la notion de liste en *Mathematica*, nous y reviendrons à la fin de ce paragraphe.

■ Exercice 2-2

a) Pour $\alpha = 7.5$ °, calculez les trois nombres suivants puis commentez les résultats obtenus

$\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\sin(48\,\alpha)$

b) Pourquoi la valeur de $\sin(48\,\alpha)$ n'est-elle pas exacte?
Corrigez le calcul de manière que *Mathematica* donne la valeur exacte de $\sin(48\,\alpha)$.

■ Fonctions

Les fonctions sont un autre constituant essentiel de *Mathematica*.

L'utilisateur peut définir des fonctions. Par exemple,

```
Clear[f, g, x];
f[x_] := -x^2 + 3 x + 2
g[x_] := 1/x
```

Remarquez

* les crochets **[...]** qui encadrent l'argument;
* le symbole de soulignement qui suit l'argument et qui signifie que **x_** peut être remplacé par n'importe quel objet (pattern) : un nombre, une liste, ... ;
* les deux points du symbole d'assignation différée **:=** qui indique que le calcul doit être effectué au moment où l'on fera appel à la fonction;
* le **Clear[...]** qui précède la définition de la fonction; il est en effet possible de poser plusieurs définitions se rapportant à la même fonction.

Par exemple, on peut appliquer une fonction à un nombre ou à une liste

```
f[11]
```

-86

```
g[{2, 3, 5, 7}]
```

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right\}$

On peut aussi composer les fonctions

```
f[g[5]]
```

$\frac{64}{25}$

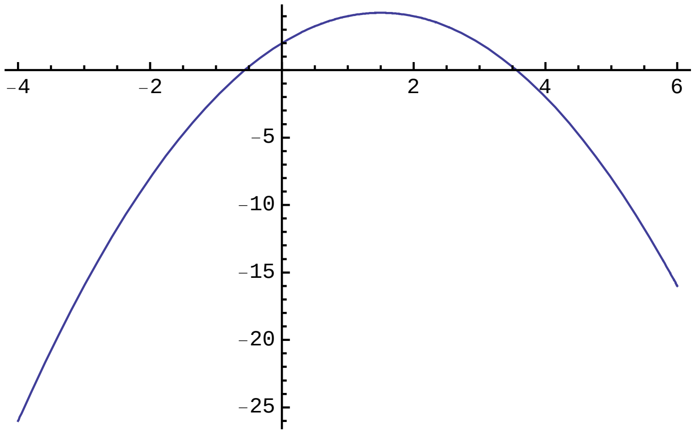
```
g[f[5]]
```

$$-\frac{1}{8}$$

■ Graphiques de fonctions

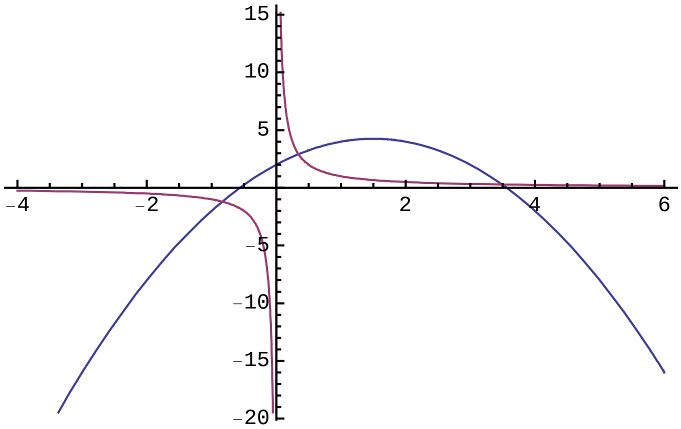
Pour dessiner une fonction:

```
Plot[f[x], {x, -4, 6}]
```



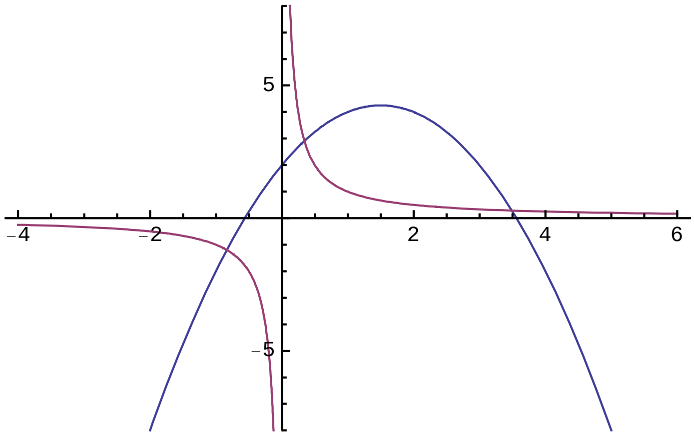
Pour superposer plusieurs fonctions dans un même graphique:

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -4, 6}]
```



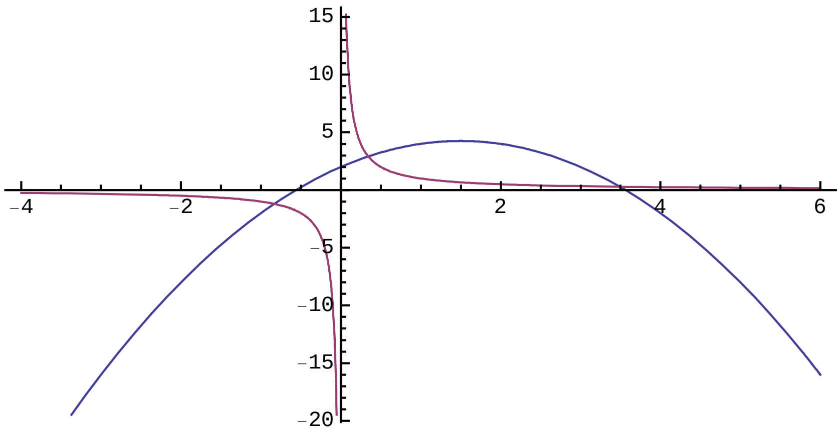
Pour prescrire l'intervalle d'arrivée à représenter :

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -4, 6}, PlotRange → {-8, 8}]
```

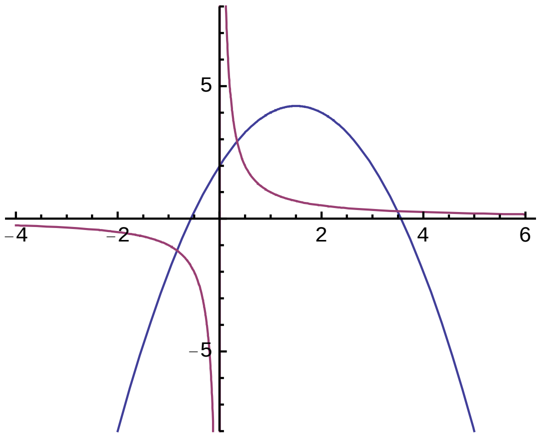


Pour que les unités soient les mêmes sur les axes des *x* et des *y* (repère orthonormé):

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -4, 6}, AspectRatio → 0.5]
```



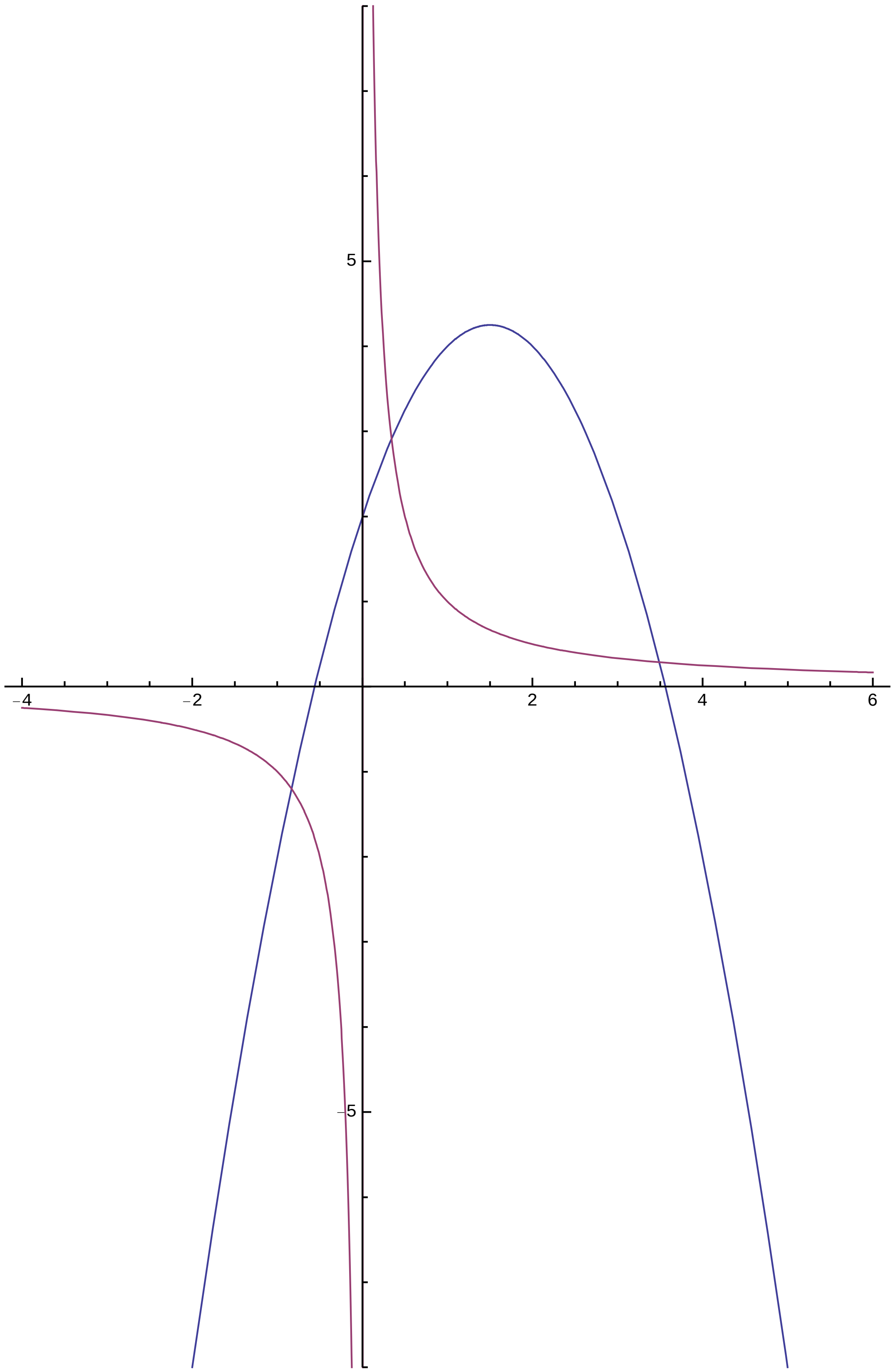

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -4, 6}, PlotRange → {-8, 8},
    AspectRatio → 0.8]
```



Le graphique obtenu peut être déplacé et agrandi.
Pour déplacer le graphique, cliquer à l'intérieur du cadre puis, en tenant le bouton de la souris enfoncé, translatez le graphique.
Pour agrandir le graphique, actionnez les poignées; par exemple, si vous déplacez la poignée située en bas à droite du cadre, le graphique conserve sa forme.

Une autre méthode consiste à prescrire sa taille avec l'option **ImageSize**:

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -4, 6}, PlotRange → {-8, 8},
    AspectRatio → Automatic, ImageSize → {500, 800}]
```



Voyons ci-après comment tracer la deuxième fonction en traitillé.
Consultez l'aide au sujet des commandes suivantes:

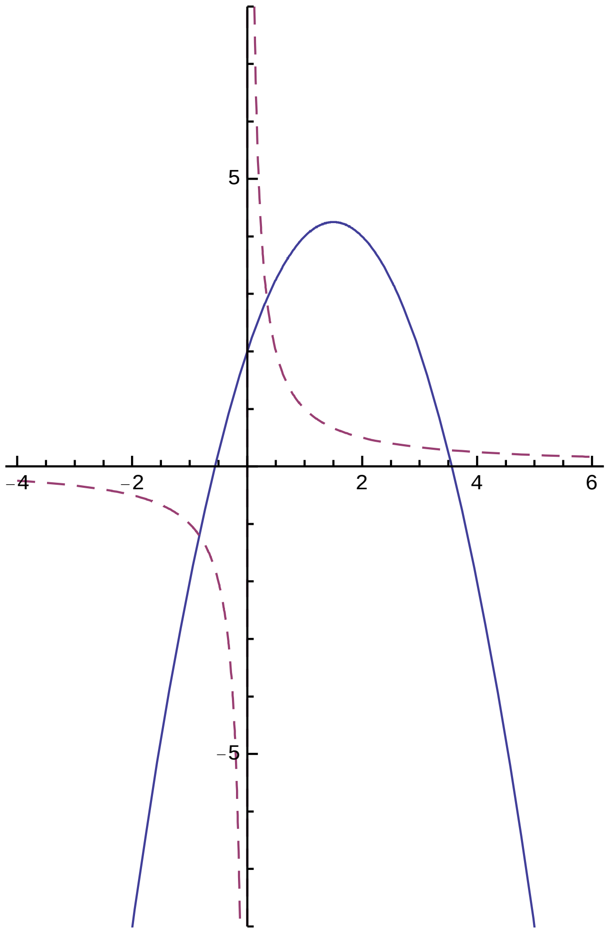
PlotStyle,
Dashing

Nous définissons deux styles de courbes :
- le premier en trait continu : **Dashing[{}]**,

- le deuxième en traitillé : **Dashing[{0.03, 0.02}]**

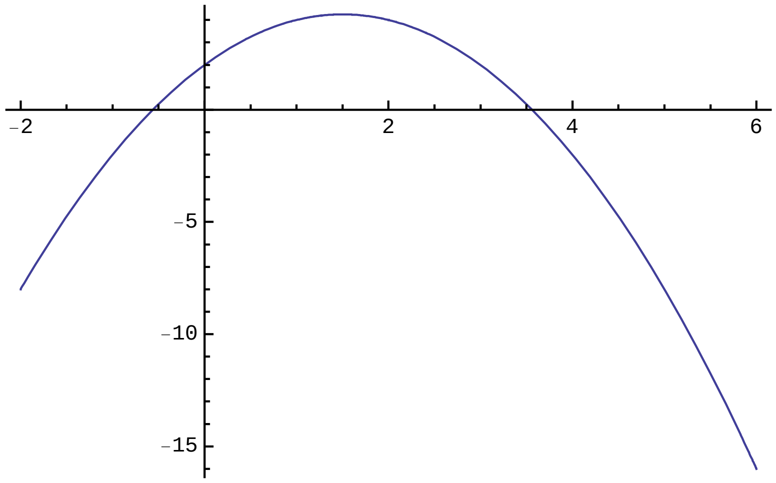
Les deux nombres indiquent l'alternance de traits et d'espaces. Par défaut, le trait est continu.

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -4, 6},
    PlotRange → {-8, 8},
    AspectRatio → Automatic,
    PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{0.03, 0.02}]}]
```

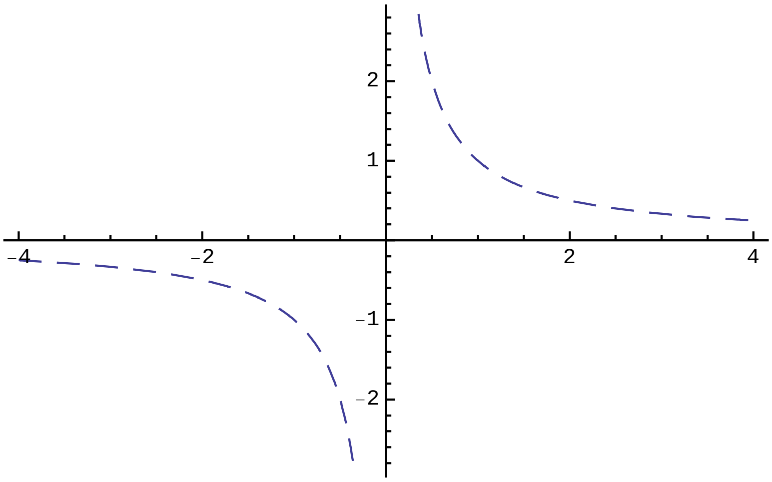


Il peut être utile de superposer deux graphiques avec la commande **Show[...]**, en particulier lorsque les deux fonctions sont représentées sur des intervalles différents :

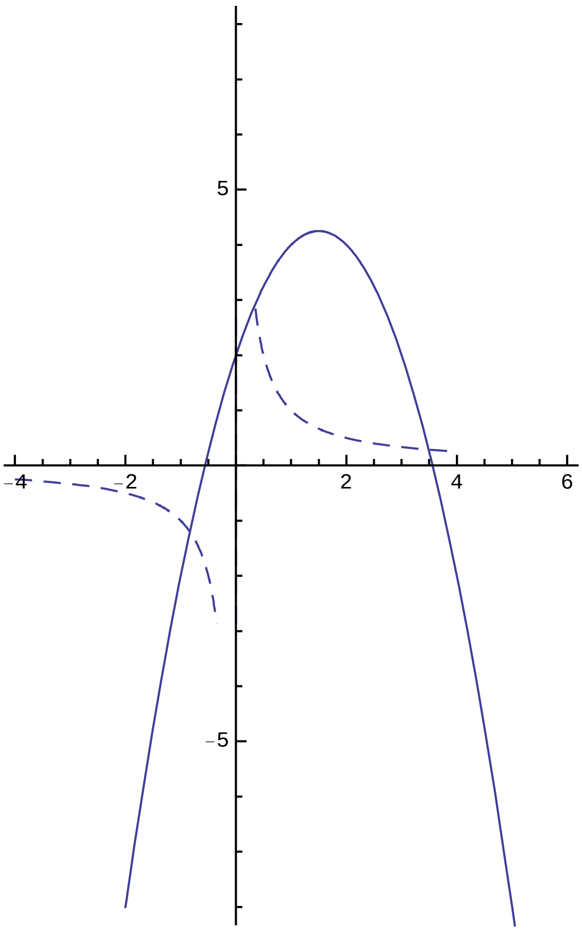
```
g1 = Plot[f[x], {x, -2, 6}]
```



```
g2 = Plot[g[x], {x, -4, 4}, PlotStyle → Dashing[{0.03, 0.02}]]
```




```
Show[g1, g2,
    AspectRatio → Automatic,
    PlotRange → {-8, 8}]
```



■ Parenthèses, accolades, crochets

Les parenthèses servent à indiquer l'ordre dans lequel les opérations doivent être effectuées.
Les crochets servent à encadrer les arguments d'une fonction.
Les accolades servent à définir des listes.
Les doubles crochets servent à extraire des sous-listes.
Voici par exemple l'ensemble des zéros du polynôme $9 x^2 + 6 x - 1$

```
es = {1/3 (-1 - √2), 1/3 (-1 + √2)}
```

$\left\{\frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{2}\right), \frac{1}{3}\left(-1+\sqrt{2}\right)\right\}$

```
N[es]
```

```
{-0.804738, 0.138071}
```

```
es[[2]]
```

$\frac{1}{3}\left(-1+\sqrt{2}\right)$

```
Clear[es]
```

■ Calculs symboliques

Un grand nombre de fonctions effectuent des calculs symboliques. A titre d'exemples, voici quelques informations sur les commandes **Factor[...]** et $\sum_{i=1}^{n}$ (voir aussi l'aide).

```
Factor[x^3 - 5 x + 4]
```

$(-1+x)\left(-4+x+x^2\right)$

On a obtenu tous les facteurs à coefficients entiers. Pour obtenir de plus les facteurs à coefficients réels, on peut rajouter la fonction **N[...]** comme ceci:

```
Factor[N[x^3 - 5 x + 4]]
```

```
(-1.56155 + 1. x) (-1. + 1. x) (2.56155 + 1. x)
```

Soit à calculer la somme

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^{20}}.$$

$$s=\sum_{i=0}^{20}\frac{1}{3^i}$$

$$\frac{5\,230\,176\,601}{3\,486\,784\,401}$$

Le symbole $\sum_{i=0}^{20}\frac{1}{3^i}$ se lit "sommation pour i allant de 0 à 20 du terme $\frac{1}{3^i}$".

A chaque valeur de $i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ correspond le terme $\frac{1}{3^i}$:

le 1-er terme est 1 (c'est la valeur de $\frac{1}{3^i}$ pour $i=0$);

le 2-ème terme est $\frac{1}{3}$ (c'est la valeur de $\frac{1}{3^i}$ pour $i=1$);

le 3-ème terme est $\frac{1}{9}$ (c'est la valeur de $\frac{1}{3^i}$ pour $i=2$);

le 4-ème terme est $\frac{1}{27}$ (c'est la valeur de $\frac{1}{3^i}$ pour $i=3$);

...

le 21-ème terme est $\frac{1}{3^{20}}$ (c'est la valeur de $\frac{1}{3^i}$ pour $i=20$).

```
N[s, 15]
```

```
1.49999999985660
```

Il est aussi possible de sommer des séries, c'est-à-dire des sommes comportant une infinité de termes:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

```
s = Sum[1/3^i, {i, 0, ∞}]
```

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i}$$

$$\frac{3}{2}$$

Lorsque la réponse est finie, on dit que la série converge.

■ Retour à la ligne

```
a = 6
b = 3
```

```
6

3
```

```
e = a + b + 2 + 5
```

```
16
```

Une instruction peut être coupée d'un retour à la ligne en certains points où elle est incomplète :

```
e = a + b +
        2 + 5
```

```
16
```

```
e = a + b + 2 +
        5
```

```
16
```

On ne peut par contre pas la couper en un point où la ligne de commande pourrait avoir un sens:

```
e = a + b
2 + 5
```

```
9

7
```

■ Point-virgule

Lorsqu'une commande est suivie d'un point-virgule, la commande est exécutée mais le résultat n'est pas affiché. De plus, le point-virgule permet de séparer des instructions situées sur une même ligne ou dans une même cellule.

```
c = 2; d = 5;
e = a + b + c + d
```

```
16
```

```
Clear[a, b, c, d, e]
```

■ Styles des cellules

Pour écrire un cahier comportant des textes, on convertit la cellule au style Texte. Pour ce faire, sélectionnez la cellule (sur les délimiteurs à droite de l'écran) puis passez par le menu "Format / Style / Text".

Chaque cellule a un style ("Input", "Output", "Text", "Section", ...). Pour changer de style, il est donc nécessaire de créer une nouvelle cellule. Pour ce faire, cliquez sous le délimiteur de cellule (ligne verticale sur la droite de la fenêtre). Une ligne horizontale apparaît. Vous pouvez alors entrer le contenu d'une nouvelle cellule.
De cette manière, vous pouvez introduire des titres, des sous-titres et des textes (styles "Title", "Section", "Text", ...).

■ Règle de transformation (Rule)

Si, dans l'expression $x^2 - 3x$, on veut remplacer x par $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, on peut procéder comme suit:

$$x^2 - 3x \;/.\; x \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$-\frac{3}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)+\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{2}\right)^2$$

L'expression "$x \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$" est une "règle de transformation (ou règle de substitution)";
le symbole " /. " est appelé "opérateur de remplacement (ou opérateur de substitution)".

Les substitutions peuvent être numériques ou littérales.
On peut aussi effectuer plusieurs remplacements:
si, dans l'expression $\frac{a^2-b^2}{a+b}$, on veut remplacer a par $1+2t$ et b par $1-t$, on peut procéder comme suit:

$$\text{Simplify}\left[\frac{a^2-b^2}{a+b} \;/.\; \{a \to 1+2t,\ b \to 1-t\}\right]$$

```
{3, 12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, 75, 84}
```

Remarquez la structure

expr /. rule

qui indique que la règle de transformation "rule" doit être appliquée à l'expression "expr".

Contrairement aux assignations, les règles de transformations n'affectent pas les variables. C'est ainsi que les variables *x*, *a*, *b* auxquelles des règles de transformations ont été appliquées dans les exemples ci-dessus n'ont pas reçu de valeur :

```
Global`x
```

```
?a
```

```
Global`a
```

```
?b
```

```
Global`b
```

Une règle de transformation ne peut être exécutée que lorsqu'on utilise une variable libre (non affectée). Par exemple:

```
x = 5;
```

$$x^2 - 3x \;/.\; x \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-2\right)$$

```
Clear[x]
```

```
10
```

Pour comprendre pourquoi la règle de transformation est sans effet, il faut remarquer qu'elle s'applique à l'expression "$5^2 - 3*5$".

Voici des exemples typiques de l'usage de règles de transformation. Mettons une liste de règles en mémoire:

```
listeRegles = {{x → 1}, {x → 3}, {x → 7}}
```

```
{{x → 1}, {x → 3}, {x → 7}}
```

Pour transformer cette liste de règles de transformations en une liste de valeurs, il suffit d'appliquer la liste de règles à la variable *x*:

```
listeValeurs = x /. listeRegles
```

```
{1, 3, 7}
```

La liste de règles peut aussi s'appliquer à une expression quelconque, par exemple

$$\text{volumeSpheres} = N\left[\frac{4\,\pi\,x^3}{3}\ /.\ \text{listeRegles}\right]$$

```
{4.18879, 113.097, 1436.76}
```

■ Résolution d'équations avec Reduce[...]

Il faut distinguer

d'une part le symbole d'assignation = qui sert à donner une valeur à une variable

```
x = 3 + 2
```

```
5
```

d'autre part, le symbole d'égalité == qui indique si une égalité est vérifiée

```
x == 7
```

```
False
```

```
x == 5
```

```
True
```

Le symbole d'égalité est utilisé pour écrire des équations.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre les équations et systèmes d'équations. Comme méthode usuelle, nous utiliserons la méthode **Reduce[...]**:

```
? Reduce
```

Reduce[*expr*, *vars*] reduces the statement *expr* by solving equations or inequalities for *vars* and eliminating quantifiers.
Reduce[*expr*, *vars*, *dom*] does the reduction over the domain *dom*. Common choices of *dom* are Reals, Integers and Complexes. »

```
Clear[x];
```

$$\text{es} = \text{Reduce}\left[2\,x^2 - x - 5 == 0,\ x,\ \text{Reals}\right]$$

$$x == \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{41}\right)\ ||\ x == \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{41}\right)$$

```
N[es]
```

$x == -1.35078 \| x == 1.85078$

Remarquez que

- le deuxième argument "**x**" indique l'inconnue par rapport à laquelle l'équation doit être résolue;
- le troisième argument "**Reals**" signifie que l'équation doit être résolue sur le domaine des nombres réels;
- la réponse est donnée sous la forme d'une expression logique (le symbole **||** signifie "**ou**");
- la désignation "**es**" signifie "Expression logique des Solutions";
- pour obtenir les valeurs numériques des solutions, on utilise **N[...]**

Voici un autre exemple dans lequel la mention du domaine a été omise:

$$\text{es} = \text{Reduce}\left[3x^2 - x + 7 == 0, x\right]$$

$$x == \frac{1}{6}\left(1 - i\sqrt{83}\right) \| x == \frac{1}{6}\left(1 + i\sqrt{83}\right)$$

```
N[es]
```

$x == 0.166667 - 1.51841\, i \| x == 0.166667 + 1.51841\, i$

Lorsque le symbole i apparaît dans la solution d'une équation, cela signifie que la réponse est un nombre complexe qui possède une partie imaginaire non nulle. Si on ne cherche que les réponses réelles, ces nombres doivent être éliminés. Pour ce faire, on peut indiquer que l'équation doit être résolue sur le domaine des nombres réels:

$$\text{es} = \text{Reduce}\left[3x^2 - x + 7 == 0, x, \text{Reals}\right]$$

```
False
```

L'expression logique **False** signifie que le système de conditions est faux pour toutes les valeurs de **x**, c'est-à-dire que l'ensemble des solutions est vide.
Voici un autre exemple dans lequel il peut être utile de demander la valeur numérique de la solution exacte:

$$\text{es} = \text{Reduce}\left[2x^3 - x + 5 == 0, x, \text{Reals}\right]$$

$$x == \text{Root}\left[5 - \#1 + 2\#1^3 \&, 1\right]$$

```
N[es]
```

$x == -1.4797$

Reduce[...] résoud les sytèmes avec des méthodes algébriques exactes. C'est pourquoi, en principe, il est préférable d'éviter les nombres écrits avec un point décimal, car ils sont entachés d'une erreur de troncature:

$$\text{Reduce}\left[x^3 == 1.3\, x, x, \text{Reals}\right]$$

$x == -1.14018 \| x == 0 \| x == 1.14018$

Il vaut mieux écrire le système avec des données exactes avant de passer aux valeurs numériques

$$\text{es} = \text{Reduce}\left[x^3 == \frac{13}{10}x, x, \text{Reals}\right]$$

$$x == 0 \| x == -\sqrt{\frac{13}{10}} \| x == \sqrt{\frac{13}{10}}$$

```
N[es]
```

$x == 0. \| x == -1.14018 \| x == 1.14018$

Puisque **Reduce[...]** résout des inéquations, la commande peut être utilisée pour déterminer le signe d'une fonction. Par exemple,

```
Clear[f]; f[x_] := x^2 - 6 x - 6;
Reduce[f[x] == 0, x, Reals]
```

$x == 3 - \sqrt{15} \,||\, x == 3 + \sqrt{15}$

```
Reduce[f[x] < 0, x, Reals]
```

$3 - \sqrt{15} < x < 3 + \sqrt{15}$

```
Reduce[f[x] > 0, x, Reals]
```

$x < 3 - \sqrt{15} \,||\, x > 3 + \sqrt{15}$

Ces résultats peuvent être regroupés dans le tableau de signes de la fonction f.

Reduce[...] résout aussi les systèmes d'équations ou d'inéquations littéraux. Il faut alors indiquer que les paramètres et inconnues sont des nombres réels

```
Reduce[V == π r^2 h, h, Reals]
```

$(V == 0 \,\&\&\, r == 0) \,||\, \left((r < 0 \,||\, r > 0) \,\&\&\, h == \frac{V}{\pi r^2}\right)$

On peut aussi préciser que des paramètres ou des inconnues appartiennent à un intervalle. (Un système d'équations ou d'inéquations peut être représenté par une liste d'équations ou d'inéquations):

```
Reduce[{V == π r^2 h, V > 0, r > 0, h > 0}, r, Reals]
```

$V > 0 \,\&\&\, h > 0 \,\&\&\, r == \frac{\sqrt{\frac{V}{h}}}{\sqrt{\pi}}$

D'une manière équivalente, un système d'équations ou d'inéquations peut aussi être formé au moyen du symbole $\wedge$ de la palette qui signifie "et":

```
Reduce[V == π r^2 h ∧ V > 0 ∧ r > 0 ∧ h > 0, r, Reals]
```

$V > 0 \,\&\&\, h > 0 \,\&\&\, r == \frac{\sqrt{\frac{V}{h}}}{\sqrt{\pi}}$

Pour résoudre un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues, le deuxième argument de **Reduce** doit être la liste des inconnues:

```
Reduce[x + y == m - 2 ∧ x - 2 y == m, {x, y}, Reals]
```

$x == -\frac{4}{3} + m \,\&\&\, y == -\frac{2}{3}$

Des compléments sur l'utilisation de **Reduce[...]** seront encore donnés dans le chapitre **Equations** *§ 3 Résolution d'équations avec Mathematica*.

■ Suppléments ou fichiers d'extension (Packages)

Mathematica propose plusieurs milliers de commandes telles **Cos**, **N**, **Plot**, **Factor**, **Clear**, ...

Il est possible de faire appel à des commandes supplémentaires définies dans des fichiers d'extension dénommés

"Packages". Certains suppléments sont fournis par *Wolfram Research* à l'achat de *Mathematica* : ce sont les "Fichiers d'extension standards" ("Suppléments / Standard Packages").

Il est aussi possible de fabriquer ses propres suppléments (Packages définis par l'utilisateur) et d'enrichir ainsi le langage *Mathematica* en l'adaptant à ses besoins. Les "packages" créés au Collège du Sud pour les besoins de l'enseignement se trouvent sur le site http://www.collegedusud.ch/app/applmaths/
à la rubrique **Documents *Mathematica* / Packages développés au Collège du Sud**

Dans tous les cas, il faut indiquer le nom du fichier dans lequel se trouve la définition des commandes supplémentaires.

■ Exercice (sans numéro)

Recherchez dans l'aide les fonctions *Mathematica* qui se rapportent aux thèmes suivants:

* algèbre élémentaire : factorisation, simplification, ...
* calcul algébrique avec les polynômes : quotient de deux polynômes , ...
* fonctions mathématiques élémentaires : log, exp, sin, cos, ...

Demandez de l'aide au sujet des fonctions et commandes suivantes :
ArcCos, Quotient, Mod, Plot, AspectRatio, Dashing, Table.

Exercices 2-3 à 2-7

Ecrivez un cahier (Notebook)
dont le titre est "Exercices 2-3 à 2-7"
dont les sections sont "Exercice 2-3", "Exercice 2-4", ...;
sous chaque section, écrivez la solution de l'exercice (styles "Input" et "Output")
accompagnée de commentaires (style "Text").
Enregistrez sous le nom **Ex2-3a7**

■ Exercice 2-3

Demandez à *Mathematica* d'effectuer les calculs suivants et observez que le calcul opère aussi sur les unités :

a) prixUnitaire = 5 fr/piece;
quantite = 42 piece;
prix = prixUnitaire*quantite

b) acceleration = m/s ^{2};
newton = kg acceleration;
joule = newton m;
watt = joule/s;
watt/m ^{2}

■ Exercice 2-4

a) Simplifiez $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}$

b) Posons $a = \frac{1-x}{1-x+x^2}$; $b = \frac{1+x}{1+x+x^2}$; $c = \frac{a+b}{b-a}$.
Simplifiez c.

c) Déterminez le signe de $x^2(x+15)+75\,(x-1)+50$, c'est-à-dire résolvez successivement
$x^2(x+15)+75\,(x-1)+50>0$

$$x^2(x+15)+75\,(x-1)+50=0$$
$$x^2(x+15)+75\,(x-1)+50<0$$

puis dresser un tableau de signes de l'expression.

d) Résolvez le système $2\,(\cos(x))^2=\cos(x)+1$ pour $0 \le x \le \pi$.

■ Exercice 2-5

Ecrivez une suite d'instructions pour résoudre le problème suivant:
"Soient $a=2$ et $b=3$ les deux cathètes d'un triangle rectangle.
Calculer l'hypoténuse et l'angle α (opposé au côté a, en degrés)".

Indications:
La fonction réciproque de **Tan** est **ArcTan**.
Pour convertir les radians en degrés, utilisez la règle de conversion
$\boldsymbol{\pi}$ (radians) **= 180°**

■ Exercice 2-6

a) Calculez la racine cubique de 9876 à 12 chiffres significatifs.
Calculez le cosinus de 70 degrés à 12 chiffres significatifs.

b) Simplifiez l'expression $$\frac{x^4-y^4}{x^3-x^2\,y+x\,y^2-y^3}.$$

■ Exercice 2-7

a) Calculez, si elles convergent, les deux séries suivantes:
$a=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\ldots$
$b=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots$

b) Calculez la somme
$c=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{10\,000}$

Exercices 2-8 et 2-9

Ecrivez un cahier (Notebook)
dont le titre est "Exercices 2-8 et 2-9"
dont les sections sont "Exercice 2-8", "Exercice 2-9";
sous chaque section, écrivez la solution de l'exercice (Styles "Input" et "Output")
accompagnée de commentaires (Style "Text")
Enregistrez sous le nom Ex2-8a9

■ Exercice 2-8

a) Résolvez l'inéquation

$$\frac{1}{x-3}+\frac{3}{x+1}\le\frac{x}{x^2-2\,x-3}$$

b) Résolvez le système d'inéquations

$$\begin{cases} \frac{1}{x-3} + \frac{3}{x+1} \leq \frac{x}{x^2-2x-3} \\ x^2 \geq 8 \end{cases}$$

■ Exercice 2-9

a) Déterminer le signe de l'expression $3x^3 + 4x^2 - 19x + 10$, c'est-à-dire résolvez successivement

$$3x^3 + 4x^2 - 19x + 10 = 0$$
$$3x^3 + 4x^2 - 19x + 10 < 0$$
$$3x^3 + 4x^2 - 19x + 10 > 0$$

puis dresser un tableau de signes de l'expression.

b) Résolvez l'équation $\sqrt{3x^2 + 4} = \dfrac{7x+5}{x+1}$.

Illustrez la situation par un graphique montrant l'intersection des deux courbes.

c) Résolvez l'équation $x^3 - 3x = \dfrac{7x+5}{x+1}$.

Illustrez la situation par un graphique montrant l'intersection des deux courbes.

Listes

■ Opérations sur les listes

```
Clear[a, b, c, d, w, x, y, z]
```

On peut multiplier une liste par un nombre

```
w {a, b, c, d}
```

```
{a w, b w, c w, d w}
```

```
5 {4, 7, 8, 12}
```

```
{20, 35, 40, 60}
```

On peut additionner un nombre à une liste

```
{a, b, c, d} + w
```

```
{a + w, b + w, c + w, d + w}
```

```
{4, 7, 8, 12} + 5
```

```
{9, 12, 13, 17}
```

On peut additionner deux listes de même longueur

```
{a, b, c, d} + {w, x, y, z}
```

```
{a + w, b + x, c + y, d + z}
```

```
{4, 7, 8, 12} + {1, 2, 3, 4}
```

```
{5, 9, 11, 16}
```

On peut effecteur le produit scalaire de deux listes de même longueur

```
{a, b, c, d}.{w, x, y, z}
```

```
a w + b x + c y + d z
```

```
{4, 7, 8, 12}.{1, 2, 3, 4}
```

```
90
```

■ Fonctions appliquées à des listes

On peut déterminer la longueur d'une liste, c'est-à-dire le nombre de termes:

```
? Length
```

```
Length[expr] donne le nombre d'éléments de expr.
```

```
Length[{6, 7, 8, 9}]
```

```
4
```

On peut rechercher la position d'un terme dans une liste, c'est-à-dire le (ou les) rang(s) qu'occupe le terme:

```
? Position
```

```
Position[expr, pattern] renvoie la liste des positions à l'intérieur de expr auxquelles se
  trouvent les objets qui ont une forme correspondant à pattern. Position[expr, pattern,
  levspec] ne trouve que les objets qui apparaissent aux niveaux spécifiés par levspec.
  Position[expr, pattern, levspec, n] donne les positions des n premiers objets trouvés.
```

```
t = {9, 8, 7, 6, 5, 7, 6, 5, 4, 3};
Position[t, 4]
```

```
{{9}}
```

```
Position[t, 7]
```

```
{{3}, {6}}
```

On peut appliquer une fonction à chaque terme d'une liste

```
? Map
```

```
Map[f, expr] ou f /@ expr applique f à chaque élément du premier niveau de expr.
  Map[f, expr, levelspec] applique f aux parties de expr déterminées par levelspec.
```

```
Clear[f];
```

f[x_] := $\frac{\pi}{x^2}$

```
Map[f, {a, b, c, d}]
```

$\left\{\frac{\pi}{a^2}, \frac{\pi}{b^2}, \frac{\pi}{c^2}, \frac{\pi}{d^2}\right\}$

```
t = Table[3 i + 1, {i, 0, 9}]
```

```
{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28}
```

```
Map[f, t]
```

$\left\{\pi, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{49}, \frac{\pi}{100}, \frac{\pi}{169}, \frac{\pi}{256}, \frac{\pi}{361}, \frac{\pi}{484}, \frac{\pi}{625}, \frac{\pi}{784}\right\}$

Il existe de nombreuses autre fonctions que nous utiliserons lorsque le besoin se fera sentir. Recherchez dans l'aide les fonctions suivantes:

First
Last
Flatten
Count

■ Tableau

```
Clear[f, absc, ord, pts];
```

$$f[x\_] := \frac{x^2}{4}$$

Pour former une liste de points de la fonction, on peut partir des abscisses puis calculer les ordonnées et enfin former la liste des points:

$$\text{absc} = \text{Table}\left[x, \left\{x, -4, 4, \frac{1}{2}\right\}\right]$$

$$\left\{-4, -\frac{7}{2}, -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$$

```
ord = Map[f, absc]
```

$$\left\{4, \frac{49}{16}, \frac{9}{4}, \frac{25}{16}, 1, \frac{9}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1, \frac{25}{16}, \frac{9}{4}, \frac{49}{16}, 4\right\}$$

```
{absc, ord}
```

$$\left\{\left\{-4, -\frac{7}{2}, -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}, \left\{4, \frac{49}{16}, \frac{9}{4}, \frac{25}{16}, 1, \frac{9}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1, \frac{25}{16}, \frac{9}{4}, \frac{49}{16}, 4\right\}\right\}$$

Une liste de listes est interprétée comme un tableau dont la première ligne est

$$\left\{-4, -\frac{7}{2}, -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$$

et dont la deuxième est

$$\left\{4, \frac{49}{16}, \frac{9}{4}, \frac{25}{16}, 1, \frac{9}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1, \frac{25}{16}, \frac{9}{4}, \frac{49}{16}, 4\right\}$$

La première colonne du tableau est $\{-4, 4\}$, la deuxième $\left\{-\frac{7}{2}, \frac{49}{16}\right\}$, ..., et la dernière colonne est $\{4, 4\}$.

La fonction "Transpose" échange les lignes et les colonnes du tableau, ce qui nous donne la liste des coordonnées des points.

```
pts = Transpose[{absc, ord}]
```

$$\left\{\{-4, 4\}, \left\{-\frac{7}{2}, \frac{49}{16}\right\}, \left\{-3, \frac{9}{4}\right\}, \left\{-\frac{5}{2}, \frac{25}{16}\right\}, \{-2, 1\}, \left\{-\frac{3}{2}, \frac{9}{16}\right\}, \left\{-1, \frac{1}{4}\right\}, \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right\}, \{0, 0\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right\}, \left\{1, \frac{1}{4}\right\}, \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{16}\right\}, \{2, 1\}, \left\{\frac{5}{2}, \frac{25}{16}\right\}, \left\{3, \frac{9}{4}\right\}, \left\{\frac{7}{2}, \frac{49}{16}\right\}, \{4, 4\}\right\}$$

Inversément, il est possible d'extraire de la liste des points la liste des abscisses et la liste des ordonnées:

```
Clear[absc, ord]
```

```
{absc, ord} = Transpose[pts]
```

$$\left\{\left\{-4, -\frac{7}{2}, -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}, \left\{4, \frac{49}{16}, \frac{9}{4}, \frac{25}{16}, 1, \frac{9}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1, \frac{25}{16}, \frac{9}{4}, \frac{49}{16}, 4\right\}\right\}$$

```
absc
```

$$\left\{-4, -\frac{7}{2}, -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$$

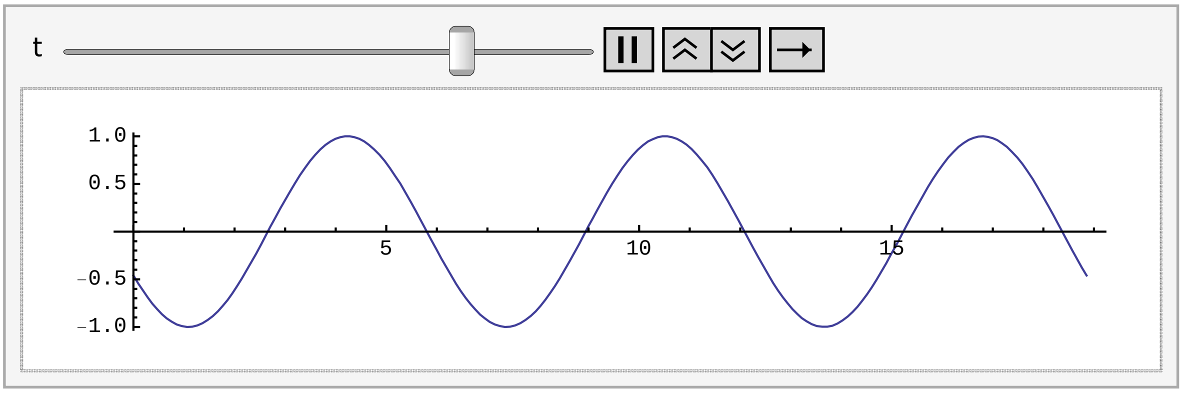
```
ord
```

$$\left\{4, \frac{49}{16}, \frac{9}{4}, \frac{25}{16}, 1, \frac{9}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1, \frac{25}{16}, \frac{9}{4}, \frac{49}{16}, 4\right\}$$

■ Animation

Une animation est constituée par une succession de graphiques qui défilent à l'écran de manière à donner l'impression de mouvement.

```
k = 1; T = 8; ω = 2 π/T;
Animate[
 Plot[Sin[k x - ω t], {x, 0, 6 π}, AspectRatio → 1/5, ImageSize → {500, 100}],
 {t, 0, T - 1}]
```



■ Exercice 2 - 10

Dans la liste suivante, déterminez la première expression dont la valeur est négative

$$\mathrm{Cos}\left[k\,\frac{2\,\pi}{17}\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Indication : formez une liste finie de valeurs : Cos[0], Cos$\left[\frac{2\pi}{17}\right]$, Cos$\left[2\,\frac{2\pi}{17}\right]$,...

déterminez les signes de chaque terme : Sign[Cos[0]], Sign$\left[\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi}{17}\right]\right]$, ...

déterminez la position des -1;

déterminez la position du premier -1;

écrivez l'expression correspondante.

■ Exercice 2 - 11

Dans la liste suivante, déterminez la fréquence de chaque occurence.

```
x = RandomInteger[6, 100]
```

```
{0, 6, 2, 0, 6, 3, 5, 5, 6, 3, 0, 3, 6, 2, 5, 5, 4, 0, 4, 3, 0, 5, 3, 3,
 6, 2, 0, 2, 1, 2, 6, 2, 1, 2, 4, 4, 6, 4, 6, 2, 2, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 0, 2,
 3, 1, 1, 3, 4, 2, 0, 6, 2, 3, 3, 0, 6, 6, 5, 3, 2, 2, 4, 6, 4, 1, 4, 6, 0,
 4, 6, 4, 3, 2, 4, 2, 1, 2, 4, 2, 4, 5, 6, 0, 4, 5, 4, 4, 5, 5, 0, 4, 3, 2, 2}
```

Indication : pour déterminer l'effectif d'une modalité, utilisez **Count[...]**;

pour écrire les effectifs de toutes les modalités, utilisez **Table[...]**.

■ Exercice 2 - 12

Résolvez les équations suivantes d'inconnue x

$$\left(m^2 + 1\right) x^2 - 4\, m\, x + 1 = 0$$

pour $m = -6, -5, \ldots, 6$.

Indication : il s'agit d'une liste dont chacun des 13 éléments est la solution d'une équation.

Méthode de travail

Lorsqu'on veut effectuer des calculs avec *Mathematica*, que faire lorsque "ça ne marche pas" ?
Voici quelques conseils pratiques qui devraient vous aider.

■ 1er conseil : appliquer les "Premiers principes" à la syntaxe

Respectez les règles de syntaxe telles que

* les commandes de *Mathematica* commencent par une lettre majuscule
  par exemple **Plot** au lieu de **plot**;
* les arguments des fonctions sont à mettre entre crochets
  par exemple **Line[...]**, **f[x]**, ... au lieu de **Line{...}**, **f(x)**, ...
* les arguments des fonctions sont séparés par des virgules
  par exemple **Plot[f[x], {x,-5,5}]** au lieu de **Plot[f[x]; {x,-5,5}]**;
* les accolades servent à définir des listes
  tandis que les parenthèses servent à définir l'ordre des opérations
  par exemple **Line[{{0,0}, {1,2}, {2,-1}}]**
  (**Line** s'appliquer à une liste de points)
  et **(2-π)/3**
* respectez les structures d'imbrications;
  on peut avoir **[{(...)}]** mais jamais **[({...)}]**.

■ 2ème conseil : appliquer les commandes aux objets voulus

Il faut soigneusement distinguer

* <u>l'assignation</u> dont le symbole est = qui attribue une valeur à une variable
  par exemple **x=5**;
* <u>l'égalité</u> dont le symbole est == qui sert à définir une équation (ou une expression booléenne)
  par exemple $x^2 - 2x + 3 == 0$ est vrai ou faux selon la valeur de x;
* <u>la fonction</u> qui est définie par une expression analytique
  par exemple **f[x_]:=**$\frac{1}{x}$

Avec **Plot**, il est vain d'essayer de dessiner
  une assignation : **Plot[y =** x^2**, ...]**;
  une équation : **Plot[y ==** $2x - 1$**, ...]**;
  deux fonctions : **Plot[f[x], g[x], ...]**;
  une relation qui n'est pas une fonction : **Plot[**$x^2 + y^2 == 1$**, ...]**;
  une fonction sans indiquer sur quel intervalle : **Plot[f[x]]**;
  une liste de fonctions sans préciser sur quel intervalle : **Plot[{f[x], g[x]}]**;

Avec **Plot**, on peut dessiner
  <u>une fonction sur un intervalle</u>
    Plot[f[x], {x, -4, 4}];
  ou <u>une liste de fonctions sur un intervalle</u>
    Plot[{f[x], g[x]}, {x, -4, 4}];

Avec **Reduce**, il est vain d'essayer de résoudre
  une assignation :**Reduce[**$x^2 = 3$**, ...]**;
  une expression : **Reduce[**$\frac{4}{3}\pi r^3$**, ...]**;
  deux équations : **Reduce[x + y == -3, 5 x - y == 1, ...]**;
  un système d'équations en donnant plusieurs inconnues : **Reduce[{x+y == -3, 5 x - y == 1}, x, y, Reals]**;

deux systèmes d'équations : **Reduce[{x+y == -3}, {5 x - y == 1}, {x, y}, Reals]**.

Avec **Reduce**, on peut résoudre

une équation en indiquant l'inconnue

Reduce[*x*^{2} == 3, x, Reals];

ou une liste d'équations en indiquant la liste des inconnues

Reduce[{x+y == -3, 5 x - y == 1}, {x,y}, Reals];

Repérez de même à quel(s) objet(s) on applique

la commande **PolynomialQuotient**,

etc...

■ 3ème conseil : corriger méthodiquement les erreurs de syntaxe

Lorsqu'il rencontre une erreur, l'élève "bricoleur" peut être tenté d'essayer des modifications (comme ajouter des parenthèses, des accolades, etc) jusqu'à ce que "ça marche". Cette attitude conduit souvent à une impasse ou à une méthode aberrante.

Pour corriger les erreurs de syntaxe, il faut adopter une attitude plus méthodique. Voici deux éléments qui vont dans ce sens :

tenir compte des messages d'erreur

et consulter l'aide.

Ces deux conseils sont illustrés par des exemples. Chaque exemple contient une ou plusieurs erreurs de syntaxe. On explique ensuite comment y remédier.

■ Exemple 3.1

```
f[x_] := 5 x / (x + 1);
plot[f[x]];
```

Il ne s'agit pas d'un message d'erreur mais d'une mise en garde : le nouveau mot "**plot**" est proche du mot "**Plot**" que connaît *Mathematica.* Corrigeons l'orthographe :

```
Plot[f[x]]
```

Plot::argr : Plot called with 1 argument; 2 arguments are expected. ≫

```
Plot[f[x]]
```

Le message d'erreur signale que la commande **Plot** doit être appelée avec deux arguments au moins, c'est-à-dire doit être de la forme

Plot[arg1, arg2]

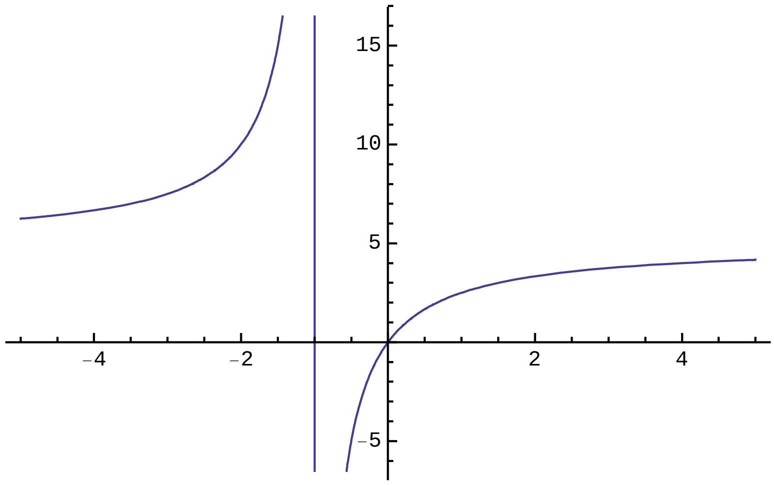
Ici, le premier argument est **f[x]** tandis que le deuxième argument manque. Pour savoir ce qui manque, on peut consulter l'aide (menu *Aide*) ou demander des informations sur **Plot** :

```
?Plot
```

```
Plot[f, {x, xmin, xmax}] produit un tracé de f comme fonction de x sur le domaine
  xmin à xmax. Plot[{f1, f2, ... }, {x, xmin, xmax}] trace plusieurs fonctions fi.
```

On voit qu'il manque l'intervalle sur lequel la fonction doit être dessinée. Par exemple,

```
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
```

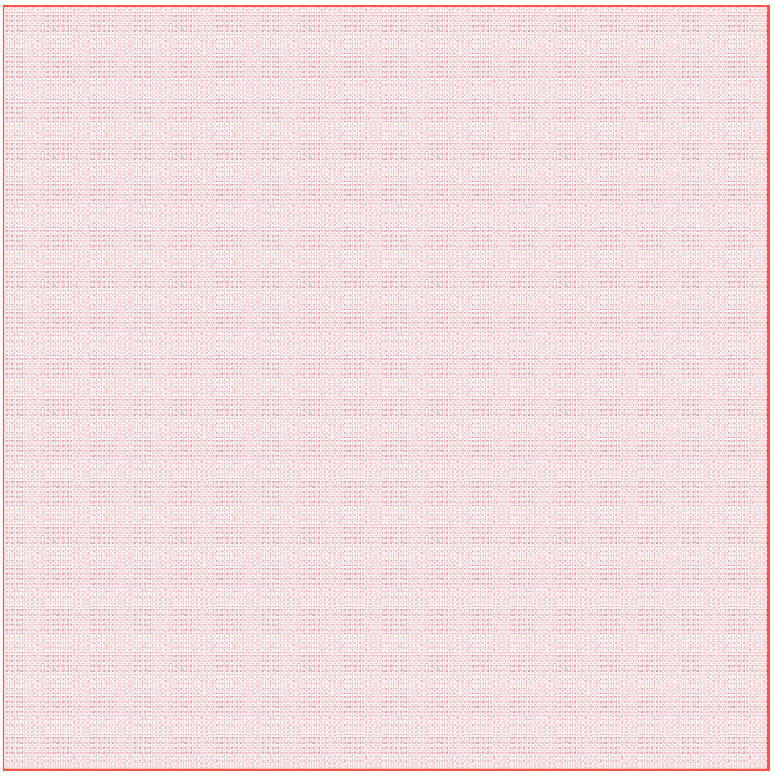


■ Exemple 3.2

```
Show[Graphics[Line[{0, 0}, {1, 1}], Line[{1, 0}, {0, 1}]];
```

Le message indique qu'il manque un crochet fermant "**]**". Corrigeons l'erreur :

```
Show[Graphics[Line[{0, 0}, {1, 1}], Line[{1, 0}, {0, 1}]]]
```



Le message concerne la fonction **Graphics**. **Graphics** a été appelé avec deux arguments **Graphics[arg1, arg2]** et le deuxième argument (il s'agit ici du deuxième **Line**) a été interprété comme étant une option.

```
? Graphics
```

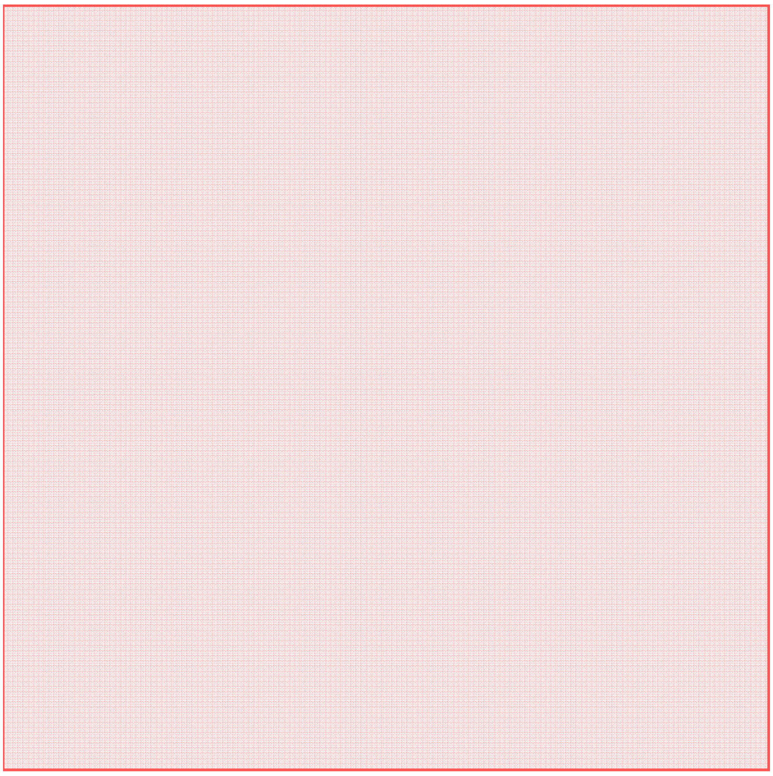
```
Graphics[primitives, options] représente une image graphique bidimensionnelle.
```

Il faut donc faire en sorte que les deux **Line** soient assemblés pour ne former qu'un seul objet. En consultant l'aide, on y trouve l'exemple suivant:

```
p = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Polygon[vertices]}]
```

Remarquez la présence des accolades dans **Graphics[{obj1, obj2, ...}]** qui indique que **Graphics** s'applique à un seul argument qui est une liste d'objets graphiques :

```
Show[Graphics[{Line[{0, 0}, {1, 1}], Line[{1, 0}, {0, 1}]}]]
```



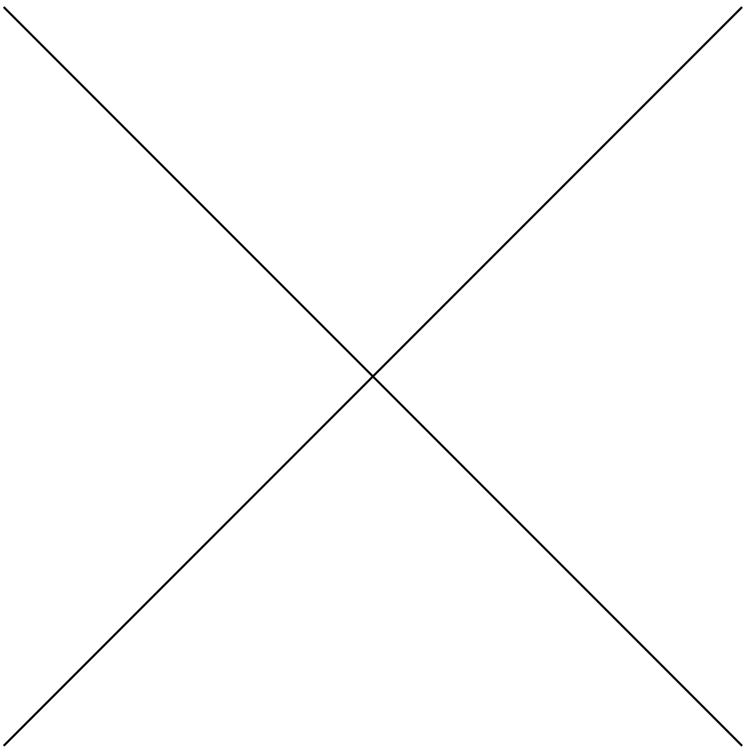
Le nouveau message d'erreur concerne la fonction **Line**.

```
? Line
```

```
Line[{pt1, pt2, ... }] est une primitive
  graphique qui représente une ligne reliant une suite de points.
```

On y remarque à nouveau la syntaxe **Line[{ ...}]** qui dit que **Line** s'applique non à des points mais à une liste de points:

```
Show[Graphics[{Line[{{0, 0}, {1, 1}}], Line[{{1, 0}, {0, 1}}]}]]
```



■ 4ème conseil : demander des informations sur les symboles utilisés

■ Exemple 4.1

Dans un premier exercice, un élève a utilisé la variable

```
x = 7;
```

Plus tard, dans un autre exercice,

```
Reduce[x^2 + 4 x + 3 == 0, x, Reals]
```

```
Reduce::ivar : 7 is not a valid variable. ≫
```

```
Reduce[False, 7, Reals]
```

Informons-nous sur le symbole **x**:

```
? x
```

```
Global`x
```

```
x = 7
```

Le message signifie que **x** est une variable globale qui vaut 7. Il faut effacer sa valeur et recommencer :

```
Clear[x];
Reduce[x^2 + 4 x + 3 == 0, x, Reals]
```

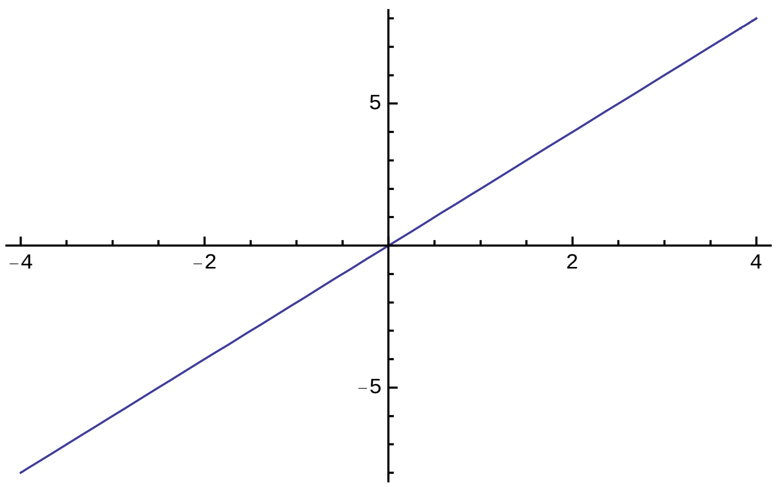
```
x == -3 || x == -1
```

■ Exemple 4.2

```
Clear[f, x];
f[x_] = x 2;
```

S'apercevant qu'il s'est trompé, l'élève recommence (et commet une autre erreur) :

```
f[x] := x^2;
Plot[f[x], {x, -4, 4}]
```



Le résultat est aberrant puisqu'on obtient une droite au lieu d'obtenir une parabole.

Lorsqu'aucune erreur de syntaxe n'est signalée mais que l'on n'obtient pas l'effet désiré, il est conseillé de demander des informations sur chaque symbole :

```
? x
```

```
Global`x
```

Le message signifie que **x** est une variable globale qui n'a pas reçu de définition. Dans notre contexte, cette situation est normale.

```
? f
```

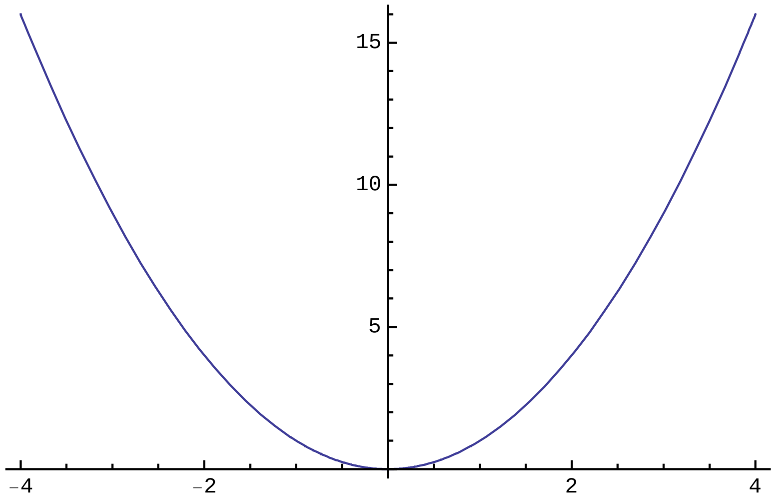
```
Global`f

f[x] := x^2

f[x_] = 2 x
```

Le message signifie que le symbole **f** a reçu deux définitions qui ont été toutes deux mémorisées. Il nous faut donc effacer le contenu de **f** puis recommencer :

```
Clear[f, x];
f[x_] := x^2;
Plot[f[x], {x, -4, 4}]
```



■ 5ème conseil : si nécessaire, abandonner ou recommencer l' exécution

Que se passe-t-il lorsque l'ordinateur reste bloqué avec le message "*En marche* ..." sur la barre supérieure de la fenêtre ? Cela signifie que l'ordinateur est en train d'effectuer un long calcul, peut-être même un calcul sans fin.

■ Pour abandonner l'exécution

Par exemple, l'instruction suivante provoque un calcul astronomique :

```
FactorInteger[2^10000 - 1]
```

Pour abandonner l'exécution, on peut passer par le menu

Noyau / Annuler l'évaluation

et on obtient alors l'output

```
$Aborted
```

Avant de poursuivre, il faut naturellement corriger l'instruction fautive :

```
FactorInteger[2^100 - 1]
```

```
{{3, 1}, {5, 3}, {11, 1}, {31, 1}, {41, 1}, {101, 1},
 {251, 1}, {601, 1}, {1801, 1}, {4051, 1}, {8101, 1}, {268501, 1}}
```

■ Pour recommencer une nouvelle session

Si "Annuler l'évaluation" ne suffit pas, on peut "Quitter le noyau" par le menu
Noyau / Quitter le noyau / Local

Après quoi il faut redonner au noyau tous les inputs nécessaires
Noyau / Evaluation / Evaluer le cahier

Approfondissements (partie facultative)

■ Représentation interne

Toutes les expressions de *Mathematica* sont représentées par des listes qui, de fait, codent des arbres. Voici quelques exemples:

```
FullForm[a + b/(c d^2) - e]
```

```
Plus[a, Times[b, Power[c, -1], Power[d, -2]], Times[-1, e]]
```

La fonction **Head[...]** donne "l'en-tête" de la représentation interne:

```
Head[a + b/(c d^2) - e]
```

```
Plus
```

Nous allons maintenant utiliser les fonctions **FullForm[...]** et **Head[...]** pour observer comment *Mathematica* représente les nombres.

■ Types de nombres

```
FullForm[-145]
```

```
-145
```

```
Head[-145]
```

```
Integer
```

```
FullForm[43/7]
```

```
Rational[43, 7]
```

```
Head[43/7]
```

```
Rational
```

```
FullForm[π]
```

```
Pi
```

```
Head[π]
```

```
Symbol
```

```
FullForm[√3]
```

```
Power[3, Rational[1, 2]]
```

```
Head[√3]
```

```
Power
```

```
FullForm[0.3]
```

```
0.3`
```

```
Head[0.3]
```

```
Real
```

```
FullForm[1.427 × 10^-5]
```

```
0.00001427000000000000002`
```

```
Head[1.427 × 10^-5]
```

```
Real
```

■ Valeur exacte et valeur numérique approchée

```
x = 100 + 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2
```

```
101.
```

La valeur de x en mémoire diffère de la valeur affichée; en effet,

```
x - 101
```

```
0.
```

Pourquoi le résultat x obtenu n'est-il pas exact ?
Les nombres 1/5 et 0.2 doivent être distingués. Le premier est un nombre rationnel, le second un nombre réel en virgule flottante.
L'ordinateur calculant en base 2, le nombre 0.2 est d'abord converti en base 2 (les indices désignent la base de numération) :

$$(0.2)_{10} = \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{0}{32} + \frac{0}{64} + \frac{1}{128} + \ldots$$

c'est-à-dire $(0.2)_{10} = (0.0011001\ \ldots)_2$

Puisque le nombre 0.2 s'écrit avec une infinité de chiffres en base 2, sa partie mantisse doit être arrondie et tronquée. La représentation interne de 0.2 n'est donc qu'approximative et vaut, dans notre exemple, environ 0.20000000000000284 (en base 10). Les calculs effectués avec ce nombre peuvent encore amplifier l'erreur.

Le système d'affichage des nombres réels en virgule flottante cherche à camoufler cette sorte d'erreur. C'est ainsi que la valeur affichée pour x est 101. La méthode consiste à utiliser une mantisse plus courte pour l'affichage que celle qui est utilisée dans la représentation interne pour les calculs. En représentation interne, la mantisse comporte un nombre fixe de chiffres en base 2 correspondant à environ 16 chiffres décimaux (valeur par défaut en l'absence d'une autre spécification).

```
Global`x
```