

§ 3 Listes

■ Exercice 3-0

Lisez attentivement le présent cahier et exécutez-en tous les inputs.

§ 3.0 Notion de liste

La liste est une structure de données très courante. Pour définir des listes, on utilise des accolades `{ }`. Une liste est ordonnée et peut contenir des éléments répétés :

```
chiffresPairs = {0, 2, 4, 6, 8}
```

```
{0, 2, 4, 6, 8}
```

```
eVide = {}
```

```
{}
```

```
notes = {4, 4.5, 4.5, 4}
```

```
{4, 4.5, 4.5, 4}
```

Un triangle peut être représenté par les coordonnées de ses trois sommets :

```
triangle = {{0, 0}, {3, 4}, {-1, 1}}
```

```
{{0, 0}, {3, 4}, {-1, 1}}
```

Les éléments d'une liste peuvent être de natures différentes et être eux-mêmes des listes:

```
Clear[a, b, c, x];
```

```
{4,  $\frac{\pi}{12}$ ,  $x^2 + 1$ , {a, {b, c}}, "Un texte"}
```

```
{4,  $\frac{\pi}{12}$ ,  $1 + x^2$ , {a, {b, c}}, Un texte}
```

Une liste peut représenter diverses structures de données: un vecteur, un ensemble, un tableau, une matrice, un arbre, etc.

Les listes jouent un rôle important en Mathematica. Lorsque nous aurons un problème à résoudre, nous allons fréquemment considérer que l'input est une liste et que l'output est une liste. Le calcul à faire consiste à transformer la liste donnée - l'input - pour obtenir la liste voulue - l'output -.

§ 3.1 Construction de listes

Construction de listes avec `Table[expr, {i, imin, imax}]`

La fonction `Table[]` permet de créer des listes:

? Table

```
Table[expr, {imax}] produit une liste de imax copies de expr. Table[expr, {i, imax}]
produit une liste des valeurs de expr lorsque i va de 1 à imax. Table[expr,
{i, imin, imax}] commence à i = imin. Table[expr, {i, imin, imax, di}] utilise
des incréments di. Table[expr, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...] donne
une liste imbriquée. La liste associée à i est la liste la plus extérieure.
```

Voici quelques exemples:

```
sArith = Table[3 + 5 i, {i, 0, 10}]
```

```
{3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53}
```

```
suite = Table[3 + 2k, {k, 0, 10}]
```

```
{4, 5, 7, 11, 19, 35, 67, 131, 259, 515, 1027}
```

```
sAngles = Table[ $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$ , {k, -3, 3}]
```

```
{ $-\frac{\pi}{4}$ ,  $-\frac{\pi}{12}$ ,  $\frac{\pi}{12}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{12}$ ,  $\frac{7\pi}{12}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ }
```

```
sCube = Table[n3, {n, -2, 5}]
```

```
{-8, -1, 0, 1, 8, 27, 64, 125}
```

```
f[x_] := x2 - 5
```

```
ptsF = Table[{x, f[x]}, {x, -3, 3}]
```

```
{{-3, 4}, {-2, -1}, {-1, -4}, {0, -5}, {1, -4}, {2, -1}, {3, 4}}
```

Dans une suite arithmétique, "incrément" est un synonyme de "raison" : c'est le nombre constant que l'on ajoute à un terme pour obtenir le terme suivant.

L'itérateur $\{x, -3, 5, \frac{3}{2}\}$ donne à x les valeurs successives de la suite arithmétique de premier terme -3, d'incrément $\frac{3}{2}$ et comprises entre -3 et 5 inclusivement.

L'itérateur $\{x, -3, 5\}$ incrémente x de 1 à chaque pas (par défaut, l'incrément est égal à 1).

```
ptsF = Table[{x, f[x]}, {x, -3, 5,  $\frac{3}{2}$ }]
```

```
{{-3, 4},  $\{-\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}\}$ , {0, -5},  $\{\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}\}$ , {3, 4},  $\{\frac{9}{2}, \frac{61}{4}\}$ }
```

■ Présentation de listes sous la forme de tableaux

Une liste peut être affichée à l'écran sous différentes formes. Présenter une liste sous la forme d'un tableau permet souvent d'augmenter la lisibilité

```
TableForm[ptsF]
```

```
-3      4
- $\frac{3}{2}$     - $\frac{11}{4}$ 
0       -5
 $\frac{3}{2}$      - $\frac{11}{4}$ 
3       4
 $\frac{9}{2}$       $\frac{61}{4}$ 
```

Il est possible d'y adjoindre des en-têtes de colonnes. Découvrez d'autres possibilités en consultant l'aide.

```
TableForm[ptsF, TableHeadings -> {None, {"x", "f(x)"}}]
```

x	f(x)
-3	4
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{4}$
0	-5
$\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{4}$
3	4
$\frac{9}{2}$	$\frac{61}{4}$

■ Exercice 3-1-1

Créez les listes suivantes au moyen de la fonction **Table[]**:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$$

$$\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100}\right\}$$

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \frac{12}{13}, \frac{14}{15}\right\}$$

$$\left\{\{1, 1\}, \left\{2, \frac{1}{2}\right\}, \left\{3, \frac{1}{3}\right\}, \left\{4, \frac{1}{4}\right\}, \left\{5, \frac{1}{5}\right\},$$

$$\left\{6, \frac{1}{6}\right\}, \left\{7, \frac{1}{7}\right\}, \left\{8, \frac{1}{8}\right\}, \left\{9, \frac{1}{9}\right\}, \left\{10, \frac{1}{10}\right\}\right\}$$

puis affichez le tableau

x	y
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{6}$
7	$\frac{1}{7}$
8	$\frac{1}{8}$
9	$\frac{1}{9}$
10	$\frac{1}{10}$

Construction de listes avec Range[imin, imax]

? Range

Range[imax] produit la liste {1, 2, ..., imax}. Range[imin, imax] produit la liste {imin, ..., imax}. Range[imin, imax, di] utilise l'incrément di.

La fonction **Range[initial, final]** équivaut à **Table[i, {i, initial, final}]** :

```
Range[0, 9]
```

```
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
```

Range[initial, final, pas] permet de construire n'importe quelle suite arithmétique :

```
Range[99, 9, -5]
```

```
{99, 94, 89, 84, 79, 74, 69, 64, 59, 54, 49, 44, 39, 34, 29, 24, 19, 14, 9}
```

Construction de listes avec **NestList[f, x, n] = {x, f[x], f[f[x]], ...}**

? NestList

`NestList[f, expr, n]` renvoie la liste
des résultats de l'application de `f` à `expr` de 0 à `n` fois.

Dans certaines listes, on passe d'un élément à l'élément suivant en appliquant toujours la même fonction `f`. Cette propriété peut être mise à profit pour créer des listes.

Par exemple, dans une suite arithmétique, on passe d'un élément au suivant en lui ajoutant un terme constant dénommé "raison". Voici par exemple une suite arithmétique de premier terme 2, de raison 3, qui comporte 13 termes:

```
Clear[successeur];
```

```
  successeur[x_] := x + 3;
```

```
NestList[successeur, 2, 12]
```

```
{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38}
```

Une suite géométrique est caractérisée par le fait que l'on passe d'un terme au suivant en le multipliant par un facteur constant dénommé "raison". Voici par exemple une suite géométrique de premier terme 2, de raison 3, qui comporte 11 termes:

```
Clear[successeur];
```

```
successeur[x_] := 3 x;
```

```
NestList[successeur, 2, 10]
```

```
{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13122, 39366, 118098}
```

■ Exercice 3-1-2

Créez les listes suivantes au moyen de `NestList[...]`:

- a) {1, -1, 1, -1, 1, -1, ...} (14 éléments);
- b) {3, 9, 81, 6561, 43046721, ...} (8 éléments);
- c) {16, 4, 2, $\sqrt{2}$, ...} (12 éléments).

Construction de listes avec **FixedPointList**

? FixedPointList

`FixedPointList[f, expr]` donne la liste des résultats de l'application répétée
de `f`, en commençant par `expr`, jusqu'à ce que le résultat demeure inchangé.

Le principe de construction de listes (l'expression indique quel est le premier élément; la fonction `f` indique comment calculer le successeur de chaque élément) est le même pour les commandes `NestList[...]` et `FixedPointList[...]`. Ce qui change, c'est la longueur de la liste.

Dans `NestList[f, expr, n]`, on doit spécifier à l'avance la longueur de la liste; elle sera de $(n + 1)$ éléments.


```
Length[FixedPointList[Sqrt, 1.5]]
```

```
51
```

■ Exercice 3-1-3

Dans le but de résoudre l'équation

$$x = \cos(x) \quad \text{où } x \text{ est en radians}$$

on construit la liste

$$x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad x_1 = \cos(x_0); \quad x_2 = \cos(x_1); \quad x_3 = \cos(x_2); \quad \dots$$

- Calculez les termes successifs de cette suite et montrez (numériquement) qu'elle atteint un point fixe.
- Démontrez (mathématiquement) que tout point fixe de la suite est une solution de l'équation.

Cette méthode qui permet de résoudre certaines équations est appelée "méthode d'itération du point fixe".

Reprenons maintenant l'exemple donné plus haut:

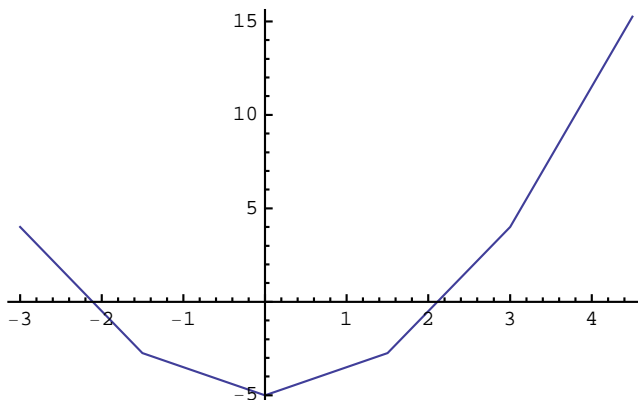
```
FixedPointList[Sqrt, 1.5]
```

- Ecrivez sous la forme mathématique la suite de nombres ainsi construite.
- Quelle est l'équation dont la méthode d'itération donnée produit une solution ? L'équation possède-t-elle d'autres solutions ?

■ Représentation graphique d'une liste de points

La commande `ListPlot[list]` trace une ligne polygonale passant par une liste de points:

```
ListPlot[ptsF, Joined -> True, ImageSize -> {300, 200}]
```



■ Problème résolu : dessiner un polygone régulier à n côtés

Représentons le polygone par une liste de points dont le dernier coïncide avec le premier pour exprimer que la ligne polygonale correspondante est fermée :

$$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots, \{x_1, y_1\}\}$$

Les points sont régulièrement disposés sur le cercle trigonométrique: les abscisses sont les cosinus des angles, les ordonnées sont les sinus des angles.

Il faut donc d'abord dresser la liste des angles: un tour vaut 2π radians, un angle au centre du polygone à n côtés vaut

$\frac{2\pi}{n}$ et la liste des angles à considérer est

$$\left\{0, \frac{2\pi}{n}, 2 * \frac{2\pi}{n}, 3 * \frac{2\pi}{n}, \dots, n * \frac{2\pi}{n}\right\}$$

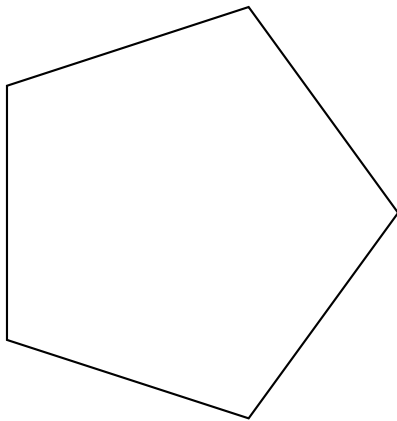
n = 5;

sPts = Table[{Cos[$\frac{k 2\pi}{n}$], Sin[$\frac{k 2\pi}{n}$]}, {k, 0, n}]

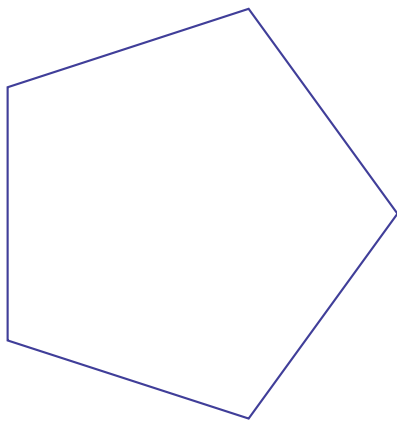
$$\left\{\{1, 0\}, \left\{\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}\right\}, \left\{\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}), \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}\right\}, \right. \\ \left. \left\{\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}), -\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}\right\}, \left\{\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), -\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}\right\}, \{1, 0\}\right\}$$

Cette liste de points - considérée comme une ligne polygonale fermée - peut être dessinée au moyen de plusieurs fonctions graphiques. Nous donnons deux méthodes, la première traduisant le point de vue de la géométrie, la deuxième celui de l'analyse.

Show[Graphics[Line[sPts]], AspectRatio → Automatic, ImageSize → {200, 200}]



ListPlot[sPts, Joined → True, Axes → False, AspectRatio → Automatic, ImageSize → {200, 200}]



Consultez l'aide pour vous informer sur les options telles que **AspectRatio→Automatic** et **ImageSize**.

■ Exercice 3-1-4

a) Représentez graphiquement la ligne polygonale (ouverte) qui passe par les points suivants:

Table[{i, (-1)ⁱ}, {i, -6, 6}]

$$\{-6, 1\}, \{-5, -1\}, \{-4, 1\}, \{-3, -1\}, \{-2, 1\}, \{-1, -1\}, \\ \{0, 1\}, \{1, -1\}, \{2, 1\}, \{3, -1\}, \{4, 1\}, \{5, -1\}, \{6, 1\}$$

- b) Représentez graphiquement la ligne polygonale (ouverte) de sommets:

```
Table[{t Cos[t], t Sin[t]}, {t, 0, 30, 0.5}];
```

§ 3.2 Extraction d'éléments ou de sous-listes

Dans les exemples qui suivent, nous repartons des listes définies dans le § 3.1

```
sArith = Table[3 + 5 i, {i, 0, 10}];
suite = Table[3 + 2k, {k, 0, 10}];
sAngles = Table[ $\frac{\pi}{4} + \frac{k \pi}{6}$ , {k, -3, 3}];
sCube = Table[n3, {n, -2, 5}];
```

Extraction de sous-listes avec Part[...]

Pour extraire le premier ou le dernier élément d'une liste:

```
First[sAngles]
```

$$-\frac{\pi}{4}$$

```
Last[sAngles]
```

$$\frac{3 \pi}{4}$$

Pour extraire l'élément numéro i d'une liste, on utilise le symbole `[[i]]` comme le montrent les exemples suivants :

```
sArith[[4]]
```

```
18
```

```
suite[[3]]
```

```
7
```

Extraire un élément ne signifie pas l'ôter de la liste. Par exemple, la liste *suite* n'a pas été modifiée:

```
? suite
```

```
Global`suite
```

```
suite = {4, 5, 7, 11, 19, 35, 67, 131, 259, 515, 1027}
```

Les doubles crochets `[[..]]` sont réservés à l'extraction de sous-listes.

```
? Part
```

```
expr[[i]] ou Part[expr, i] renvoie la i-ème composante de expr. expr[[-i]]
  compte à partir de la fin. expr[[0]] renvoie le type de expr. expr[[i, j, ...
  ]] ou Part[expr, i, j, ... ] est équivalente à expr[[i]] [[j]] ... . expr[[
  {i1, i2, ... } ]] renvoie la liste des composantes i1, i2, ... de expr.
```

On peut extraire plusieurs éléments consécutifs; par exemple, pour extraire les éléments numéros 3, 4, 5, 6

```
sCube[[Range[3, 6]]]
```

```
{0, 1, 8, 27}
```

On peut aussi extraire une sous-liste quelconque; par exemple, pour extraire les éléments numéros 3,5,6 d'une liste:

```
suite[[{3, 5, 6}]]
```

```
{7, 19, 35}
```

On peut utiliser des indices négatifs:

- 1 représente le dernier élément,
- 2 l'avant-dernier élément, etc.

```
suite[[-1]]
1027
```

■ Test d'appartenance à une liste avec `MemberQ[list, form]`

Pour savoir si un élément appartient à une liste:

```
MemberQ[Table[i^2, {i, 1, 9}], 64]
True

MemberQ[Table[i^2, {i, 1, 9}], 65]
False
```

Recherche d'éléments d'après leurs valeurs

Pour la valeur maximale ou minimale des éléments d'une liste:

```
Max[suite]
1027

Min[sCube]
-8
```

Pour déterminer le nombre d'occurrences d'un élément dans une liste, on peut utiliser la fonction `Count[liste, element]`:

```
Count[{147, 36, 24, 36, 21, 36, 12}, 36]
3
```

Pour déterminer les positions d'un élément d'une valeur donnée à n'importe quel niveau

```
a = {147, 36, {24, 36}, 21, 36, 12};
pos = Position[a, 36]
{{2}, {3, 2}, {5}}
```

? Position

`Position[expr, pattern]` renvoie la liste des positions à l'intérieur de `expr` auxquelles se trouvent les objets qui ont une forme correspondant à `pattern`. `Position[expr, pattern, levspec]` ne trouve que les objets qui apparaissent aux niveaux spécifiés par `levspec`. `Position[expr, pattern, levspec, n]` donne les positions des `n` premiers objets trouvés.

Pour déterminer les positions d'un élément d'une valeur donnée en limitant la recherche au premier niveau

```
pos = Position[a, 36, 1]
{{2}, {5}}
```

Pour déterminer le nombre d'occurrences d'un élément dans une liste

```
Count[a, 36]
2
```

■ Problème résolu: tableau de fréquences

On lance 100 fois un dé à jouer et on note les résultats obtenus:

```
jets = RandomInteger[{1, 6}, 100]

{5, 6, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 1, 4, 2, 2, 6, 5, 6, 1, 2, 1, 3, 4, 5, 4, 3, 4,
 3, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 5, 2, 3, 5, 5, 1, 5, 2, 6, 3, 1, 3, 5, 4, 4, 5, 5, 4,
 6, 3, 1, 5, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 4, 6, 3, 1, 4, 4, 1,
 1, 2, 4, 2, 4, 5, 5, 4, 2, 2, 3, 1, 5, 4, 1, 2, 4, 5, 6, 1, 2, 1, 3, 1, 6, 3}
```

Calculons la fréquence de chaque face:

```
frequence = Table[{i, Count[jets, i]}, {i, 1, 6}];

TableForm[frequence, TableHeadings -> {None, {"Face", "Nombre d'occurrences"}}]
```

Face	Nombre d'occurrences
1	18
2	18
3	16
4	19
5	16
6	13

■ Exercice 3-2-1

Considérons les listes

```
ls = Table[Sin[ $\frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$ ], {k, -5, 15}];
lt = Table[(-1)^i, {i, -5, 15}];
```

- Calculez le nombre d'occurrences de l'élément **1** dans les listes **ls** et **lt**.
- Déterminez la position de chaque **1** dans **ls** et **lt**.

■ Exercice 3-2-2

Etant donné la liste

```
liste = Table[{i, (-1)^i}, {i, -6, 6}]

{{-6, 1}, {-5, -1}, {-4, 1}, {-3, -1}, {-2, 1}, {-1, -1},
 {0, 1}, {1, -1}, {2, 1}, {3, -1}, {4, 1}, {5, -1}, {6, 1}}
```

- extrayez le 3-ème élément;
extrayez l'avant-dernier élément;
- à quelle(s) position(s) se trouve(nt) les éléments $\{-1,-1\}$ et $\{1,-1\}$?

■ Problème résolu

Dans le chapitre "Equations", nous avons déjà résolu la famille de systèmes d'équations

$$\frac{\alpha - \sin(\alpha)}{2\pi} = t \quad \text{pour } t \in \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\right\}$$

$$h = r \left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \quad \text{pour } r = \frac{1}{2}$$

Nous voulons maintenant montrer comment l'utilisation de listes permet d'écrire des programmes plus courts et plus

souples :

$$\mathbf{es} = \text{Table}\left[\text{FindRoot}\left[\frac{\alpha - \text{Sin}[\alpha]}{2\pi} == t, \left\{\alpha, \frac{t}{2\pi}\right\}\right], \left\{t, 0, 1, \frac{1}{10}\right\}\right]$$

FindRoot::lstol :

The line search decreased the step size to within tolerance specified by AccuracyGoal and PrecisionGoal but was unable to find a sufficient decrease in the merit function. You may need more than MachinePrecision digits of working precision to meet these tolerances. >>

```
{{α → 0.}, {α → 1.62675}, {α → 2.11314}, {α → 2.49078}, {α → 2.8248}, {α → 3.14159},
{α → 3.45839}, {α → 3.7924}, {α → 4.17005}, {α → 4.65643}, {α → 6.28321}}
```

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}; \quad \mathbf{h} = \mathbf{r} \left(1 - \text{Cos}\left[\frac{\alpha}{2}\right]\right) / \mathbf{es}$$

```
{0., 0.156476, 0.254069, 0.340154, 0.421132,
0.5, 0.578868, 0.659846, 0.745931, 0.843524, 1.}
```

§ 3.3 Opérations sur les listes

Dans les exemples qui suivent, nous repartons des listes définies dans le § 3.1

```
sArith = Table[3 + 5 i, {i, 0, 10}];
suite = Table[3 + 2k, {k, 0, 10}];
sAngles = Table[ $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$ , {k, -3, 3}];
sCube = Table[n3, {n, -2, 5}];
```

Opérations arithmétiques sur les listes

Mathematica autorise d'appliquer les opérations courantes à des listes.

On peut additionner deux listes de même longueur c'est-à-dire additionner les éléments de même position:

```
sArith + suite
{7, 13, 20, 29, 42, 63, 100, 169, 302, 563, 1080}
```

```
sArith + sCube
```

```
Thread::tdlen: Objects of unequal length in
  {3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53} + {-8, -1, 0, 1, 8, 27, 64, 125}
cannot be combined. >>
```

```
{-8, -1, 0, 1, 8, 27, 64, 125} + {3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53}
```

On peut ajouter ou soustraire un nombre à une liste c'est-à-dire à chaque élément de la liste:

```
sCube - 10
{-18, -11, -10, -9, -2, 17, 54, 115}
```

On peut multiplier une liste par un nombre c'est-à-dire multiplier chaque élément de la liste par un nombre:

```
5 * sCube
{-40, -5, 0, 5, 40, 135, 320, 625}
```

On peut appliquer une fonction à une liste c'est-à-dire à tous les éléments de la liste:

```
Cos[sAngles]
 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ 
```

On peut aussi élever un nombre à une liste d'exposants:

```
2{3,4,5}
{8, 16, 32}
```

■ Exercice 3-3-1:

Construisez les suites *sArith*, *suite*, *sCube* et *sAngles* au moyen de **Range[imin, imax]** au lieu de **Table[]**. C'est une occasion d'effectuer des opérations arithmétiques sur une liste.

$$\{3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53\}$$

$$\{4, 5, 7, 11, 19, 35, 67, 131, 259, 515, 1027\}$$

$$\{-8, -1, 0, 1, 8, 27, 64, 125\}$$

$$\left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

■ Flatten

La fonction **Flatten** sert à supprimer certaines paires d'accolades.

Prenons un exemple.

```
liste = Table[{i, j}, {i, 1, 5}, {j, 1, 5}]
```

```
{{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}},
  {{2, 1}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}}, {{3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5}},
  {{4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}}, {{5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}}
```

```
liste[[1]]
```

```
{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}
```

```
Length[liste]
```

```
5
```

Observez attentivement les accolades : il s'agit d'une liste de listes de listes !

```
liste[[1]][[3]]
```

```
{1, 3}
```

```
liste[[1]][[3]][[2]]
```

```
3
```

On aimerait réorganiser la liste précédente de telle manière qu'elle devienne une liste de 25 points dont le premier élément est {1, 1}. Pour ce faire, il faut supprimer les accolades de niveau 1.

```
? Flatten
```

```
Flatten[list] aplatit les listes imbriquées. Flatten[list, n] aplatit jusqu'à n
niveaux. Flatten[list, n, h] aplatit les sous-expressions dont le type est h.
```

```
tableau = Flatten[liste, 1]
```

```
{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 1}, {2, 2},
  {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 1},
  {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}
```

```
tableau[[1]]
```

```
{1, 1}
```

```
Length[tableau]
```

```
25
```

Par défaut, la fonction **Flatten** enlève toutes les accolades intérieures:

```
liste = {11, {22, {33, {44, {55, {66}}}}}};
```

```
Flatten[liste]
```

```
{11, 22, 33, 44, 55, 66}
```

Il est possible de n'éliminer que les accolades des n premiers niveaux:

```
Flatten[liste, 2]
{11, 22, 33, {44, {55, {66}}}}
```

■ Problème résolu : extraction des éléments positifs d'une liste

Etant donné la liste

```
a = Cos[Range[0, 6]]
{1, Cos[1], Cos[2], Cos[3], Cos[4], Cos[5], Cos[6]}
```

on peut en extraire les éléments positifs en utilisant la fonction

Sign[x] qui signifie signe de x
de la manière suivante:

```
Sign[a]
{1, 1, -1, -1, -1, 1, 1}

pos = Position[Sign[a], 1]
{{1}, {2}, {6}, {7}}
```

Les éléments à retenir sont

```
a[[Flatten[pos]]]
{1, Cos[1], Cos[5], Cos[6]}
```

■ Coïncidences de deux listes

```
a = {86, 34, 45, 97, 13, 23};
b = {45, 34, 39, 45, 13, 97};
```

Pour déterminer les coïncidences entre deux listes, on peut observer la position des zéros dans la différence des deux listes:

```
a - b
{41, 0, 6, 52, 0, -74}

Position[a - b, 0]
{{2}, {5}}
```

Remarquez que l'élément 45 est dans l'intersection des deux listes mais n'est pas une coïncidence car il ne se trouve pas à la même position dans les deux listes. Une coïncidence signifie non seulement qu'un élément se trouve dans les deux listes mais encore qu'il est situé à la même position dans chaque liste.

```
pos = Flatten[Position[a - b, 0]]
{2, 5}

a[[pos]]
{34, 13}
```

On peut aussi déterminer le nombre de coïncidences entre deux listes:

```
Count[a - b, 0]
```

```
2
```

■ Transpose

Quelle relation y a-t-il entre les deux listes suivantes ?

```
sPts = {{x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}, {xn, yn}};
sao = {{x1, x2, x3, xn}, {y1, y2, y3, yn}};
```

Pour la mettre en évidence, affichons ces listes sous la forme de tableaux appelés matrices (**MatrixForm[...]** est un format d'affichage):

```
MatrixForm[sPts]
```

$$\begin{pmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \\ x3 & y3 \\ xn & yn \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[sao]
```

$$\begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 & xn \\ y1 & y2 & y3 & yn \end{pmatrix}$$

On observe que les lignes de la première sont les colonnes de la deuxième. Dans un tel cas, on dit que la deuxième matrice est la transposée de la première (et la première est la transposée de la deuxième):

```
Transpose[sPts]
```

```
{{x1, x2, x3, xn}, {y1, y2, y3, yn}}
```

```
Transpose[sao]
```

```
{{x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}, {xn, yn}}
```

```
MatrixForm[Transpose[frequence]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 18 & 18 & 16 & 19 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

Utilisons la transposition pour former une liste de points:

```
x = Range[0, 9];
```

```
f[x_] := x2 - 3;
```

```
sPts = Transpose[{x, f[x]}]
```

```
{{0, -3}, {1, -2}, {2, 1}, {3, 6}, {4, 13}, {5, 22}, {6, 33}, {7, 46}, {8, 61}, {9, 78}}
```

Réciproquement, utilisons la transposition pour extraire de **sPts** la liste des ordonnées:

```
y = Transpose[sPts][[2]]
```

```
{-3, -2, 1, 6, 13, 22, 33, 46, 61, 78}
```

■ Exercice 3-3-2

Affichez la liste des 10 premiers nombres premiers

a) en un tableau sur deux lignes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 & 23 & 29 \end{pmatrix}$$

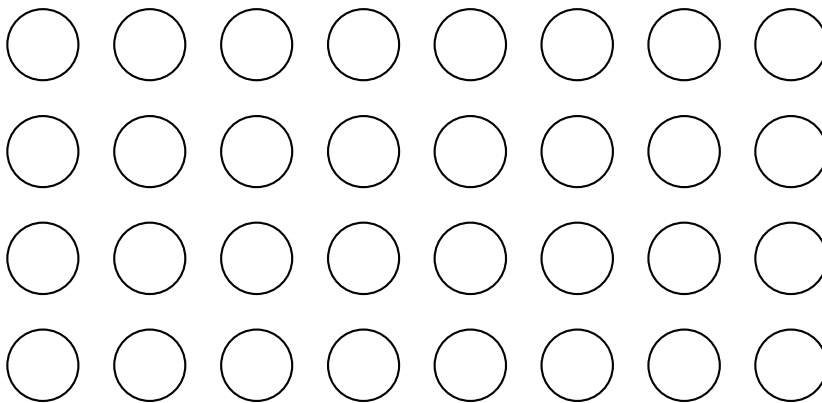
b) en un tableau sur deux colonnes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \\ 5 & 11 \\ 6 & 13 \\ 7 & 17 \\ 8 & 19 \\ 9 & 23 \\ 10 & 29 \end{pmatrix}$$

■ Exercice 3-3-3

Dessinez le graphique suivant :

```
Show[Graphics[Table[Circle[{x, y},  $\frac{1}{3}$ ], {x, 1, 8}, {y, 1, 4}],
  AspectRatio -> Automatic, Axes -> None, ImageSize -> {400, 200}]]
```



Indications:

la liste des cercles est de la forme **{Circle[{x1, y1}, r], Circle[{x2, y2}, r], ...}**;

ne pas dactylographier la liste des cercles, mais utiliser la fonction **Table[...]** pour la créer;

utiliser **Show[Graphics[listeDesCercles]]** pour la dessiner.

■ Exercice 3-3-4 [facultatif]

On donne la fonction

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x}$$

a) Dressez les trois listes suivantes

les abscisses $x = \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots, 10\frac{1}{4}\}$;

les ordonnées $y = \{f[-\frac{3}{4}], f[-\frac{1}{4}], f[\frac{1}{4}], f[\frac{3}{4}], \dots, f[10\frac{1}{4}]\}$;

les points $p = \{(-\frac{3}{4}, f[-\frac{3}{4}]), (-\frac{1}{4}, f[-\frac{1}{4}]), \dots, (10\frac{1}{4}, f[10\frac{1}{4}])\}$.

b) Calculez les valeurs maximale et minimale de la liste y
puis déterminez les abscisses correspondantes.

- c) Dessinez la ligne polygonale qui joint les points de p .
- d) Extrayez de y les valeurs qui sont positives
puis formez la liste des points correspondants
et affichez ces points sous la forme d'un tableau de nombres en virgule flottante.

Appliquer à une liste une fonction ayant un nombre quelconque d'arguments: **Apply[f, {a1, a2, ...}] = f[a1, a2, ...]**

■ Somme, produit et moyenne d'une liste

Plus[a1, a2, ...] est une fonction à plusieurs arguments qui donne la somme des arguments:

```
Plus[2, 3, 4, 5]
```

```
14
```

Par contre, lorsqu'on applique **Plus** à une liste, on n'obtient pas la somme des éléments car la fonction **Plus** n'a qu'un seul argument

```
Plus[{2, 3, 4, 5}]
```

```
{2, 3, 4, 5}
```

```
Plus[sCube]
```

```
{-8, -1, 0, 1, 8, 27, 64, 125}
```

La commande **Apply[...]** permet de transformer les éléments d'une liste en arguments d'une fonction

```
? Apply
```

```
Apply[f, expr] ou f @@ expr remplace le type de expr par f. Apply[f, expr,
  levelspec] remplace les types aux parties de expr spécifiées par levelspec.
```

Apply[f,{a,b,c}] équivaut à **f[a,b,c]**; par exemple,

```
Apply[Plus, {2, 3, 4, 5}]
```

```
14
```

On peut ainsi obtenir la somme des éléments d'une liste

```
Apply[Plus, sCube]
```

```
216
```

D'une manière analogue, on peut calculer le produit des éléments d'une liste:

```
Times[2, 3, 4, 5]
```

```
120
```

```
Times[sCube]
```

```
{-8, -1, 0, 1, 8, 27, 64, 125}
```

```
Apply[Times, sCube]
```

```
0
```

Factorielle d'un nombre

Un ensemble de 3 éléments distincts $\{a, b, c\}$ peut être ordonné de 6 manières différentes :

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

On dit que la factorielle de 3 vaut 6, ce qu'on note $3! = 6$. On la calcule comme suit :

$$3! = 1*2*3$$

D'une manière générale, à un ensemble de n éléments correspond $n!$ listes de longueur n .

On construit la fonction "factorielle de n " qui, pour un naturel n donné, calcule le produit

$$1 * 2 * 3 * 4 * \dots * n$$

```
Clear[factorielle];
factorielle[n_] := Apply[Times, Range[n]]

Table[{i, factorielle[i]}, {i, 10}]

{{1, 1}, {2, 2}, {3, 6}, {4, 24}, {5, 120},
 {6, 720}, {7, 5040}, {8, 40320}, {9, 362880}, {10, 3628800}}
```

Pour calculer la moyenne arithmétique d'une liste, on divise la somme par le nombre d'éléments:

$$\text{moyenne} = \frac{\text{Apply[Plus, sCube]}}{\text{Length[sCube]}}$$

27

Mieux encore: on peut définir une fonction qui calcule la moyenne de n'importe quelle liste

```
Clear[moyenne];
moyenne[x_List] := Apply[Plus, x] / Length[x]

moyenne[sCube]

27
```

Le symbole `x_List` spécifie que la fonction `moyenne` doit être appliqué à une liste `x`.

■ Exercice 3-3-5

Calculez la somme, le produit et la moyenne arithmétique de chacune des listes suivantes: `sArith`, `suite`, `sCube` et `sAngles`.

Appliquer une fonction à chaque élément d'une liste:

Map[f, {a1, a2, ...}] = {f[a1], f[a2], ...}

Certaines fonctions, lorsqu'elles sont appliquées à des listes, sont distribuées aux éléments de la liste. On dit qu'elles sont "**Listable**".

```
Tan[Range[-4, 4]]

{-Tan[4], -Tan[3], -Tan[2], -Tan[1], 0, Tan[1], Tan[2], Tan[3], Tan[4]}

Clear[f]; f[x_] := x^2;
f[Range[9]]

{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81}
```

Par contre, d'autres fonctions, lorsqu'elles sont appliquées à une liste, ne sont pas distribuées aux éléments de cette liste. On dit qu'elles ne sont pas "Listable". C'est en particulier le cas pour certaines fonctions telles que **Show**, **Graphics**, **Line**, **Polygon**, **Circle**, **Point**, ...

```

a = Table[{x, f[x]}, {x, 1, 9}];
Point[a]

Point[{{1, 1}, {2, 4}, {3, 9}, {4, 16}, {5, 25}, {6, 36}, {7, 49}, {8, 64}, {9, 81}}]

```

L'opérateur **Map** sert à appliquer une fonction aux éléments d'une liste. Par défaut, la fonction est appliquée aux éléments du premier niveau de la liste

```

Map[Point, a]

{Point[{1, 1}], Point[{2, 4}], Point[{3, 9}], Point[{4, 16}], Point[{5, 25}],
 Point[{6, 36}], Point[{7, 49}], Point[{8, 64}], Point[{9, 81}]}

```

```

Clear[f]; f[Range[9]]

f[{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}]

```

```

Map[f, Range[9]]

{f[1], f[2], f[3], f[4], f[5], f[6], f[7], f[8], f[9]}

```

? Map

Map[f, expr] ou f /@ expr applique f à chaque élément du premier niveau de expr.
Map[f, expr, levelspec] applique f aux parties de expr déterminées par levelspec.

■ Exercice 3-3-6

a) Calculez les valeurs de la fonction $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ aux abscisses entières entre -10 et 10.

Prescription d'exercice: utilisez Map.

b) Dressez la liste des points correspondants.

■ Graphique avec Map[Line, {listeDeLignesPolygonales}]

Pour tracer les 4 fenêtres de la maison, on applique une translation à chaque sommet de la première fenêtre:

```

SetOptions[Graphics, AspectRatio -> Automatic];
c = {{0, 0}, {0, 7}, {3, 10}, {6, 7}, {6, 0}, {0, 0}}
f1 = {{1, 1}, {1, 3}, {2, 3}, {2, 1}, {1, 1}}

{{0, 0}, {0, 7}, {3, 10}, {6, 7}, {6, 0}, {0, 0}}

{{1, 1}, {1, 3}, {2, 3}, {2, 1}, {1, 1}}

```

Pour traduire d'un vecteur t une ligne polygonale f1, on additionne t à chaque élément x de f1:

```

Clear[add]; add[t_][x_] := x + t;
f2 = Map[add[{0, 3}], f1];
f3 = Map[add[{3, 0}], f1];
f4 = Map[add[{3, 3}], f1];

```

Expliquons ce qui précède

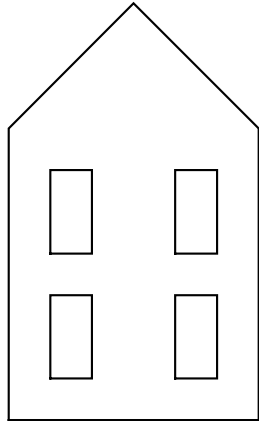
```

Map[add[{3, 0}], f1]
= Map[add[{3, 0}], {{1, 1}, {1, 3}, ...}]
= { add[{3, 0}][{1, 1}], add[{3, 0}][{1, 3}], ... }
= {{1, 1} + {3, 0}, {1, 3} + {3, 0}, ... }
= {{4, 1}, {4, 0}, ... }

```

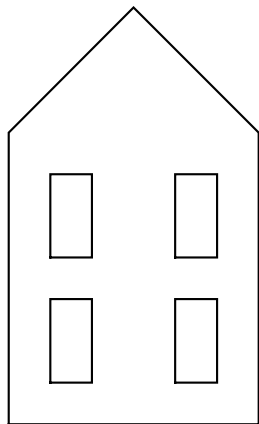
Comme il y a 5 lignes polygonales fermées à tracer, il faudra appeler 5 fois la fonction **Line[]**:

```
Show[Graphics[{Line[c], Line[f1], Line[f2],
               Line[f3], Line[f4]}], ImageSize -> {200, 200}]
```



Grâce à l'usage de l'opérateur Map, il est possible d'éviter d'écrire 5 fois la fonction **Line[]**:

```
maison = {c, f1, f2, f3, f4};
Show[Graphics[Map[Line, maison]], ImageSize -> {200, 200}]
```



Expliquons ce qui précède :

```
Map[Line, maison]
= Map[Line, {c, f1, f2, f3, f4}]
= {Line[c], Line[f1], Line[f2], Line[f3], Line[f4]}
```

■ Listes comme ensembles (facultatif)

Une liste (ordonnée) peut être utilisée pour décrire un ensemble (non ordonné). Les intéressés peuvent se rapporter aux annexes du § 3, plus précisément: sur le site

<http://www.collegedusud.ch/app/applmaths/>

suivez les rubriques **Documents Mathematica / Annexes**

et téléchargez le document **mathematica / 3-S1_Ensembles.nb**

■ Produit scalaire de deux listes

Dans le cours de mathématiques, on étudie le produit scalaire de deux vecteurs du plan :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Dans le langage Mathematica, cette opération peut être exécutée entre deux listes de même longueur.

Le symbole du produit scalaire est le point :

```
Clear[a, b, c, d, e, f]
{a, b, c} . {d, e, f}
a d + b e + c f
```

■ Exemple 1 (géométrie analytique)

Pour calculer la norme d'un vecteur \vec{u} , on peut extraire la racine carrée du carré scalaire :

```
Clear[norme];
norme[u_List] := Sqrt[u.u];
norme[{a, b}]
Sqrt[a^2 + b^2]
```

Pour calculer l'angle φ entre deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} , vous connaissez la formule du produit scalaire :

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

En Mathematica, définissons une fonction qui donne l'angle en radians entre deux vecteurs :

```
Clear[angle];
angle[u_List, v_List] := ArcCos[
  
$$\frac{u \cdot v}{\text{norme}[u] \text{norme}[v]}$$

];
angle[{1, 0}, {1, 1}]

$$\frac{\pi}{4}$$

```

■ Exemple 2 (polynômes)

En mathématiques, nous avons vu qu'un polynôme est de la forme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Les coefficients d'un polynôme étant donnés (dans l'ordre a_0, a_1, \dots)

```
coeff = {9, -8, 7, -6, 5, -4}
{9, -8, 7, -6, 5, -4}
```

on peut définir la fonction polynôme comme étant le produit scalaire des deux listes

```
{9, -8, 7, -6, 5, -4} . {1, x, x^2, x^3, x^4, x^5}
Clear[p, x];
p[x_] := coeff.Table[x^k, {k, 0, Length[coeff] - 1}];
p[x]
9 - 8 x + 7 x^2 - 6 x^3 + 5 x^4 - 4 x^5
```

■ Exercice 3-3-7

On donne les coordonnées des sommets d'un triangle ABC. Calculez

les longueurs des 3 côtés et

les angles intérieurs α, β, γ , exprimés en degrés.

$$A(-1; -2), \quad B(1; 5), \quad C(7; 3)$$

■ Exercice 3-3-8

Etant donné une liste de notes et la liste des coefficients correspondants, calculez la moyenne pondérée des notes

- a) Données numériques (la note 4.5 a le coefficient 3; la note 5 a le coefficient 2; ...):

```
notes = {4.5, 5, 3.5, 4, 6, 5.5};
```

```
coeff = {3, 2, 1, 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ };
```

- b) Généralisez : écrivez une fonction qui calcule la moyenne de la liste "notes" pondérée par les coefficients "coeff" (on suppose que les deux listes ont la même longueur).

■ Exercice 3-3-9

En fonction de la température en degrés Celsius 0, 1, ..., 119, on donne les **pressions de saturation de la vapeur d'eau** correspondantes, en pascals (voir "*Formulaires et tables*"). **Données numériques pour l'exercice 3-3-9** : sur le site <http://www.collegedusud.ch/app/applmaths/>

suivez les rubriques **Documents Mathematica / Annexes**

et téléchargez le document **mathematica / 3-3-9_donnees_exercice.nb**

```
psat = {611, 657, 706, 758, 813, 872, 935, 1002, 1073, 1148, 1228, 1312, 1402, 1497,
1598, 1705, 1818, 1937, 2063, 2197, 2338, 2487, 2643, 2809, 2983, 3167, 3360,
3564, 3780, 4005, 4243, 4492, 4755, 5030, 5319, 5623, 5941, 6275, 6625, 6992,
7375, 7778, 8199, 8639, 9101, 9583, 10086, 10612, 11160, 11735, 12334, 12959,
13611, 14292, 15000, 15737, 16505, 17308, 18143, 19012, 19916, 20856,
21834, 22849, 23906, 25003, 26143, 27326, 28554, 29828, 31157, 32517,
33944, 35424, 36957, 38543, 40183, 41877, 43636, 45463, 47343, 49289,
51316, 53409, 55569, 57809, 60115, 62488, 64941, 67474, 70096, 72801,
75592, 78474, 81477, 84513, 87675, 90935, 94295, 97757, 101325, 105000,
108772, 112673, 116665, 120799, 125046, 129403, 133912, 138511, 143263,
148148, 153153, 158310, 163620, 169050, 174644, 180378, 186275, 192335};
```

- a) Formez la liste des points de mesures $\{0, 611\}, \dots, \{119, 192335\}$ et dessinez le graphique de la pression de saturation de l'eau en fonction de la température.
- b) Formez la liste des points de mesures $\{611, 0\}, \dots, \{192335, 119\}$ et dessinez le graphique de la température d'ébullition de l'eau en fonction de la pression.
- c) A partir de **psat**, formez un tableau dans lequel chaque ligne est constituée de 10 éléments

```
tabl = {{611, ..1148}, {1228, ...}, ..., {..., 192335}}
```

Présentez les pressions de saturation sous la forme du tableau donné ci-dessous.

Les commandes de mise en page sont données.

§ 3.4 Extraction d'éléments ou de sous-listes avec Select

```
sArith = Table[3 + 5 i, {i, 0, 10}];
```

```
suite = Table[3 + 2k, {k, 0, 10}];
```

```
sAngles = Table[ $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$ , {k, -3, 3}];
```

```
sCube = Table[n3, {n, -2, 5}];
```

? Select

Select[list, crit] extrait tous les éléments ei de la liste list pour lesquels crit[ei] est True. Select[list, crit, n] extrait les n premiers éléments pour lesquels crit[ei] est True.

Pour extraire d'une liste tous les éléments vérifiant un certain critère, on peut utiliser la fonction **Select**. Par exemple, pour extraire tous les éléments positifs:

```
Clear[positifQ];
positifQ[x_] := x > 0;
Select[sCube, positifQ]

{1, 8, 27, 64, 125}
```

Le critère de sélection **positifQ** est une fonction à valeur booléenne (vrai ou faux):

```
positifQ[-7]

False

positifQ[8]

True
```

Sont sélectionnés tous les éléments de la liste **sCube** pour lesquels **positifQ** est vrai.

Pour extraire tous les angles dont le cosinus est négatif:

```
Clear[cosNegQ];
cosNegQ[x_] := Cos[x] < 0;
Select[sAngles, cosNegQ]

{ $\frac{7\pi}{12}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ }
```

Une liste de critères usuels est disponible. Il s'agit de fonctions dont le nom se termine par Q (ce qui signifie Question).

Voici quelques exemples:

"odd" signifie "impair"; ("OddQ" pose la question "impair?");
 "even" signifie "pair";
 "prime" signifie "premier";
 "integer" signifie "entier".

```
Select[sArith, OddQ]

{3, 13, 23, 33, 43, 53}

Select[sArith, EvenQ]

{8, 18, 28, 38, 48}

Select[sArith, PrimeQ]

{3, 13, 23, 43, 53}

Select[sAngles, IntegerQ]

{}
```

Voyons maintenant comment l'utilisateur peut définir lui-même un critère de sélection.

La condition d'égalité s'écrit ==

```
2 == 1 + 1

True

3 == 1 + 1

False
```

Le critère "x est un multiple de 3" peut s'écrire:

```
Clear[mult3Q];
mult3Q[x_] := Mod[x, 3] == 0;
mult3Q[14]

False

mult3Q[15]

True
```

Les multiples de 3 de **sArith** sont:

```
Select[sArith, mult3Q]

{3, 18, 33, 48}
```

Il y a donc lieu de distinguer

le symbole d'affectation immédiate =
 le symbole d'affectation différée :=
 le symbole d'égalité logique ==

Dans un critère,

le "et" logique se note && au clavier, ce qui équivaut au \wedge de la palette;
 le "ou" logique se note || au clavier (touches "Alt Gr" et "7")
 ce qui équivaut au \vee de la palette.

Le critère "x est un nombre pair supérieur à 20" peut s'écrire:

```
Clear[critQ];
critQ[x_] := EvenQ[x] & x > 20;
Select[sArith, critQ]

{28, 38, 48}
```

■ Exercice 3-4-1

On donne la liste

```
liste = Table[{x, Cos[x]}, {x, -6, 6}]

{{-6, Cos[6]}, {-5, Cos[5]}, {-4, Cos[4]}, {-3, Cos[3]}, {-2, Cos[2]}, {-1, Cos[1]},
{0, 1}, {1, Cos[1]}, {2, Cos[2]}, {3, Cos[3]}, {4, Cos[4]}, {5, Cos[5]}, {6, Cos[6]}}
```

Formez les sous-ensembles suivants:

lp1 = ensemble des points à l'intérieur du premier quadrant;
lp2 = ensemble des points à l'intérieur du deuxième quadrant;
lp3 = ensemble des points à l'intérieur du troisième quadrant;
lp4 = ensemble des points à l'intérieur du quatrième quadrant.

■ Problème résolu : triplets de Pythagore (version avec Select[])

Dresser une partie de la liste des triplets de Pythagore, plus précisément:

dressez la liste des triplets (a, b, c) tels que

a, b, c sont des entiers positifs

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$2 \leq a < b \leq 12$$

Nous allons effectuer le calcul en deux étapes.

Dans une première partie, en n'utilisant qu'une partie des conditions à remplir, nous allons former une liste de candidats

```
candidats = Flatten[Table[{a, b, Sqrt[a^2 + b^2]}, {a, 2, 11}, {b, a + 1, 12}], 1];
```

Enlevez les points-virgules afin de voir les résultats intermédiaires.

Les candidats vérifient certaines conditions requises, mais pas toutes. Une liste de candidats est une liste finie qui contient l'ensemble des solutions.

La deuxième partie du calcul est un filtrage. Nous ne retenons que les candidats dont la troisième composante est entière:

```
Clear[critQ];
critQ[x_] := IntegerQ[x[[3]];
Select[candidats, critQ]

{{3, 4, 5}, {5, 12, 13}, {6, 8, 10}, {9, 12, 15}}
```

La dernière condition peut aussi s'écrire sous la forme

```
Clear[critQ];
critQ[{a_, b_, c_}] := IntegerQ[c];
Select[candidats, critQ]

{{3, 4, 5}, {5, 12, 13}, {6, 8, 10}, {9, 12, 15}}
```

■ Exercice 3-4-2 (version avec Select)

Parmi les nombres naturels inférieurs à 1000, quels sont ceux qui sont des carrés parfaits et qui sont de la forme $4n + 1$ avec n entier ?

Indication: formez la liste des carrés parfaits inférieurs à 1000; puis, dans cette liste, sélectionnez les nombres dont le reste de la division par 4 donne 1.

Extraction de sous-listes avec Cases[list, pattern /; condition] (Facultatif)

Les intéressés peuvent se rapporter aux annexes du § 3, plus précisément: sur le site <http://www.collegedusud.ch/app/ap-plmaths/>

suivez les rubriques **Documents Mathematica / Annexes**
et téléchargez le document **mathematica / 3-S2_Cases.nb**

Exercices de récapitulation § 3.1 à § 3.3

Les trois exercices qui suivent sont des questions d'examen sur le chapitre "Listes".

■ Exercice 3 - R1

Construisez les listes a,b,c,d et les sommes e, f suivantes

$$\begin{aligned}
 a &= \{x, x^2, x^3, \dots, x^{36}\} \\
 b &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{36}\right\} \\
 c &= \{1, -1, 1, -1, \dots\} \quad (\text{liste de 36 termes}) \\
 d &= \left\{x, -\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, -\frac{x^4}{4}, \dots, -\frac{x^{36}}{36}\right\} \\
 e &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots - \frac{x^{36}}{36}
 \end{aligned}$$

$$f = 0.8 - \frac{0.8^2}{2} + \frac{0.8^3}{3} - \frac{0.8^4}{4} + \dots - \frac{0.8^{36}}{36}$$

■ Exercice 3 - R2

On considère la suite de valeurs numériques en virgule flottante

$$\left\{ 0, \frac{1.}{2. + 0}, \frac{1.}{2. + \frac{1.}{2. + 0}}, \frac{1.}{2. + \frac{1.}{2. + \frac{1.}{2. + 0}}}, \frac{1.}{2. + \frac{1.}{2. + \frac{1.}{2. + \frac{1.}{2. + 0}}}}, \dots \right\}$$

- Définissez la fonction qui, étant donné un terme x de la suite, donne le terme suivant "successeur de x".
- Construisez la liste des 36 premiers termes de la suite.
- Calculez le point fixe de la fonction "successeur".

■ Exercice 3-R3

- Construisez la liste

$$\text{rayons} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{512} \right\}$$

- A partir de la liste précédente et de la fonction

$$\text{cercle}[r_] := \text{Circle}[\{1-r, 0\}, r]$$

construisez la famille de cercles

$$\text{famCercles} = \left\{ \text{Circle}[\{0, 0\}, 1], \right. \\ \left. \text{Circle}[\left\{1 - \frac{1}{2}, 0\right\}, \frac{1}{2}], \dots, \text{Circle}[\left\{1 - \frac{1}{512}, 0\right\}, \frac{1}{512}] \right\}$$

- Dessinez la figure correspondante.