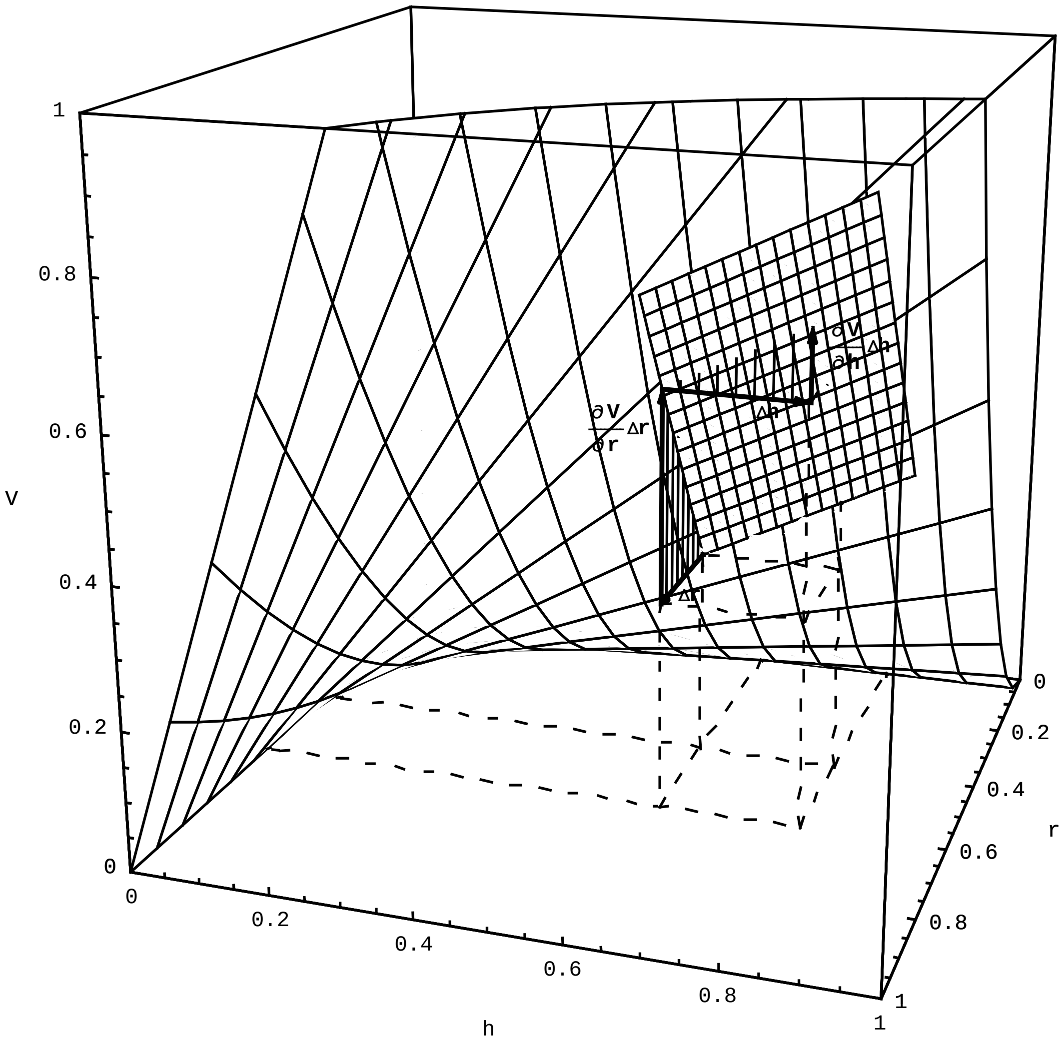
Collège du Sud, Bulle
3-ème année OS PAM

Applications des mathématiques

Fonctions de plusieurs variables et différentielles



Version pour Mathematica
Edition 2011-2012
Marcel Délèze, Eugène Pasquier
www.collegedusud.ch/app/applmaths/

La numérotation des paragraphes et des pages fait suite au chapitre ***Fonctions de plusieurs variables et dérivées partielles***.

§ 3 Différentielle d'une fonction d'une variable

§ 3-1 Exemple introductif

On a mesuré le côté d'un carré. La mesure a donné 1 m avec une imprécision de ± 0.05 m, ce que nous notons

$$x = 1 \qquad -0.05 \leq \Delta x \leq 0.05$$

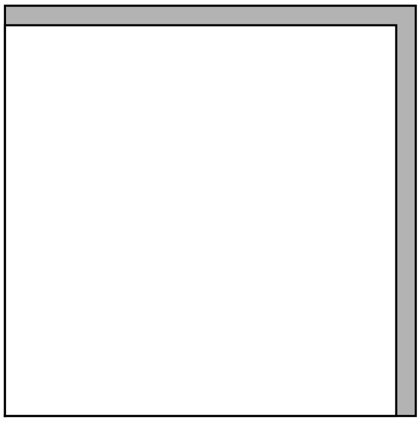
Etudions l'incertitude sur l'aire du carré

$$y = x^2 \qquad \Delta y = ?$$

Utilisons les notations suivantes

$$h = \Delta x$$
$$f(x) = x^2$$

<u>Figure</u> : Δy est l'accroissement de l'aire du carré pour un accroissement du côté de Δx



- **Accroissement de la fonction**

La quantité suivante est appelée *accroissement de la fonction f en 1 pour l'accroissement h*

$$\Delta y = \Delta f(1;\ h) = f(1+h) - f(1)$$
$$= (1+h)^2 - 1 = 2\,h + h^2$$

On peut dresser une tabelle des accroissements de la fonction

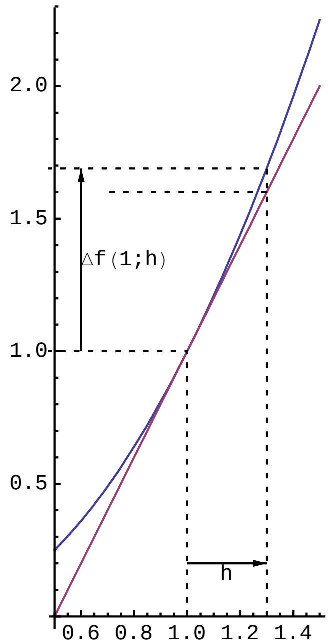
$$h \mapsto \Delta f(1;\ h) = f(1+h) - f(1)$$

h	$\Delta f(1;\ h)$
−0.05	−0.0975
−0.04	−0.0784
−0.03	−0.0591
−0.02	−0.0396
−0.01	−0.0199
0.00	0.0000
0.01	0.0201
0.02	0.0404
0.03	0.0609
0.04	0.0816
0.05	0.1025

On interprète ces accroissements dans le graphique de la fonction *f* de la manière suivante

$\Delta f(1;\ h)$ = *accroissement de la fonction* f en 1 pour l'accroissement h de la variable

(fig. avec $h = 0.3$)



■ Différentielle

Nous voulons montrer que, lorsque h est petit, la tangente est très proche de la fonction. On peut alors approximer l'accroissement Δf(1; h) par une fonction linéaire dont la pente est égale à la dérivée de la fonction

$$df\,(1;\ h) = f'\,(1)\,h = 2\,h$$

Cette expression est appelée *différentielle de f en 1 pour l'accroissement h*. On peut dresser une tabelle des différentielles au voisinage de x = 1

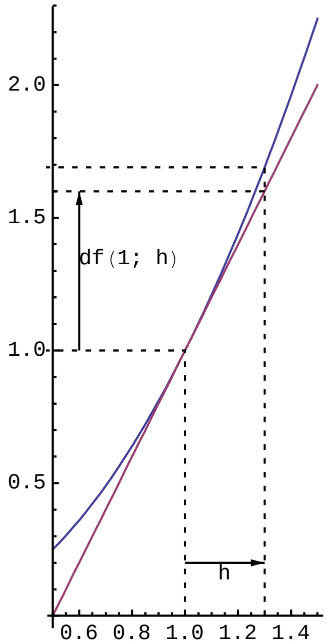
$$h \mapsto df\,(1;\ h) = f'\,(1)\,h$$

h	$df(1;\ h)$
−0.05	−0.10
−0.04	−0.08
−0.03	−0.06
−0.02	−0.04
−0.01	−0.02
0.00	0.00
0.01	0.02
0.02	0.04
0.03	0.06
0.04	0.08
0.05	0.10

On interprète ces approximations linéaires dans le graphique de la fonction *f* de la manière suivante

$\mathrm{df}(1;\ h) =$ *accroissement de la fonction tangente* en 1 pour l'accroissement h de la variable

(fig. avec $h = 0.3$)



■ Erreur d'approximation

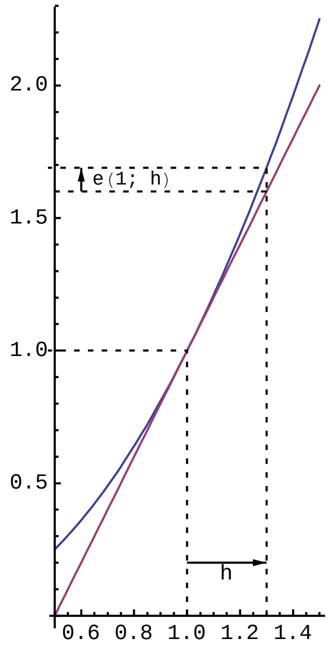
L'erreur d'approximation est

$$h \mapsto e\ (1;\ h) = \Delta f\ (1;\ h) - \mathrm{df}\ (1;\ h) = \left(2\,h + h^2\right) - (2\,h) = h^2$$

On interprète l'erreur d'approximation dans le graphique de la manière suivante

$e(1;\ h) =$ mesure de l'*écart vertical* entre la tangente et la courbe

(fig. avec h = 0.3)



Comparons maintenant l'accroissement et la différentielle

h	$\Delta f(1;\ h)$	$df(1;\ h)$	$e(1;\ h)$
0.30000	0.690000000	0.600000000	0.090000000
0.03000	0.060900000	0.060000000	0.000900000
0.00300	0.006009000	0.006000000	$9.000000000 \times 10^{-6}$
0.00030	0.000600090	0.000600000	$9.000000000 \times 10^{-8}$
0.00003	0.000060001	0.000060000	$9.000000000 \times 10^{-10}$

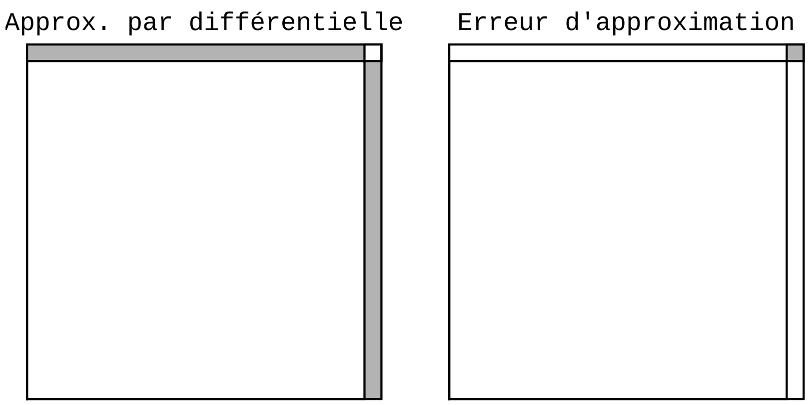
Lorsque h tend vers 0, l'accroissement de la fonction et la différentielle tendent tous deux vers 0. Mais comme l'erreur d'approximation tend vers 0 beaucoup plus vite encore, l'accroissement et la différentielle prennent des valeurs très voisines:

$$\Delta f(1;\ h) \approx df(1;\ h) = f'(1) \cdot h = 2\,h \qquad \text{pour de petits } h$$

On peut maintenant donner au problème initial une réponse simple:

$$\Delta y \approx 2\,\Delta x$$

Par exemple, lorsque l'erreur sur la mesure du côté est $\Delta x = 0.05\ m$, l'erreur sur l'aire du carré est $\Delta y \approx 0.1\ m^2$.



L'erreur d'approximation de l'accroissement par la différentielle est négligeable.

§ 3-2 Différentielle de f en (x; h)
Première formulation

Au paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à l'accroissement de la fonction f en $x = 1$ pour l'accroissement $\Delta x = h$. Nous nous intéressons maintenant au même problème (accroissement de la fonction $f(x) = x^2$pour l'accroissement $\Delta x = h$) <u>en une abscisse x quelconque</u>.

■ Accroissement de la variable

L'accroissement de la variable indépendante x est notée

$$\boxed{\Delta x}$$

Cet accroissement peut aussi être désigné par n'importe quelle autre variable, h par exemple. Un accroissement Δx positif représente une augmentation de x tandis qu'un accroissement négatif représente une diminution de x.

■ Accroissement de la fonction

$$\boxed{\Delta f(x;\ \Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x)} \qquad \text{ou} \qquad \Delta f(x;\ h) = f(x + h) - f(x)$$

■ Différentielle de f en x pour l'accroissement h (ou approximation linéaire)

$$\boxed{df(x;\ \Delta x) = f'(x)\,\Delta x} \qquad \text{ou} \qquad df(x;\ h) = f'(x)\,h$$

■ Erreur d'approximation

$$\boxed{e(x;\ \Delta x) = \Delta f(x;\ \Delta x) - df(x;\ \Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\,\Delta x} \qquad \text{ou}$$

$$e(x;\ h) = \Delta f(x;\ h) - df(x;\ h) = f(x + h) - f(x) - f'(x)\,h$$

Graphiquement, l'erreur d'approximation représente l'écart vertical entre la tangente et la courbe.

■ Changement de repère

Pour centrer notre attention sur le voisinage du point $T(x,\ f(x))$ et simplifier l'expression de l'accroissement, il est utile d'effectuer le changement de repère suivant dans lequel $(x,\ y)$ représente les coordonnées du problème donné tandis que $(X,\ Y)$ représente de nouvelles coordonnées dont l'origine est située au point T. Par rapport à ce nouveau repère, on a donc $T(0, 0)$. C'est le point de vue adopté dans la figure qui suit.

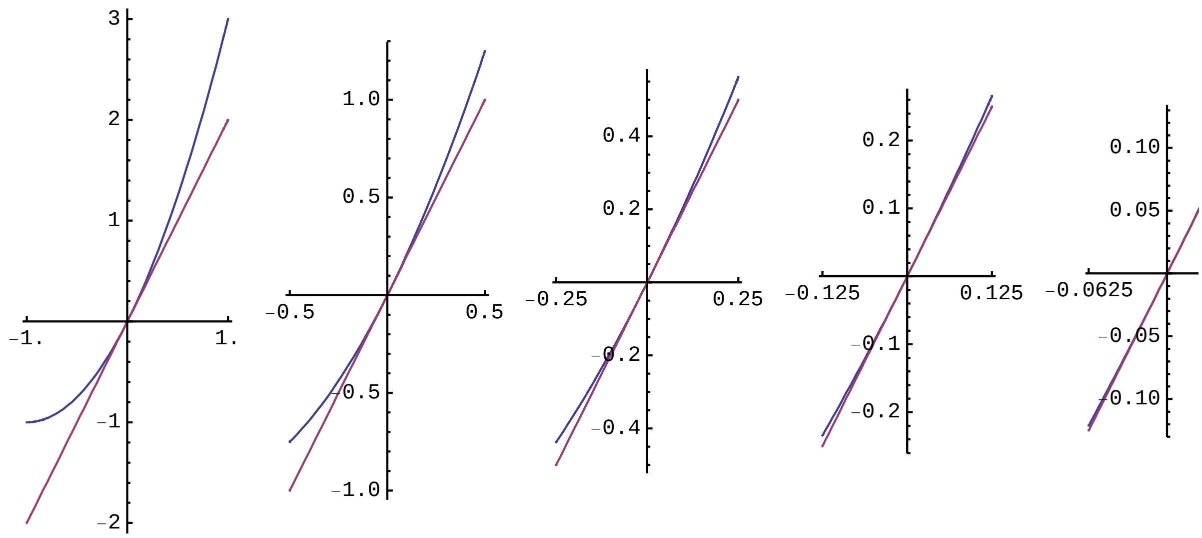
■ Interprétation géométrique

Si on effectue une suite de zooms successifs autour du point $T(x,\ f(x))$, on peut observer que la courbe tend vers une droite qui est la tangente à la courbe. Par un changement de repère, en considérant le point T comme nouvelle origine, la courbe est localement décrite par la fonction

$$h \mapsto \Delta f(x;\ h) = f(x + h) - f(x)$$

tandis que la tangente est décrite par la fonction linéaire

$$h \mapsto df(x;\ h) = f'(x)\,h$$



Existence de la différentielle

La fonction est différentiable en x si et seulement si l'erreur d'approximation tend vers 0 plus vite que h, c'est-à-dire l'erreur divisée par h tend vers 0:

$$\frac{e(x;\ h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \quad \text{vérifie} \quad \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{e(x;\ h)}{h} = 0}$$

En d'autres termes, il faut et il suffit que f soit dérivable en x.

Relation entre accroissement et différentielle

$$\Delta f(x;\ \Delta x) = df(x;\ \Delta x) + e(x;\ \Delta x)$$
$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + e(x;\ \Delta x)}$$

Lorsque h tend vers 0, la quantité $e(x;\ h)$ tend vers 0 plus vite que h. Pour de petites valeurs de h, l'erreur d'approximation $e(x;\ h)$ est négligeable par rapport $\Delta f(x;\ h)$ et $df(x;\ h)$. Par conséquent, l'accroissement sera très voisin de la différentielle:

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)\,h$$

§ 3-3 Différentielle de f en x
Deuxième formulation

La différentielle de f en x est la fonction linéaire

$$df(x):\quad h \mapsto m\,h \qquad \text{où} \qquad m \ \text{est une constante à déterminer}$$

de telle manière qu'elle approxime au mieux l'accroissement de la fonction f en x

$$\Delta f(x):\quad h \mapsto f(x+h) - f(x)$$

La meilleure approximation vérifie la condition suivante:

la différence entre l'accroissement et la différentielle tend vers 0 plus vite que h, c'est-à-dire

$$f(x+h) - f(x) - m\,h = e(x;\ h) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{e(x;\ h)}{h} = 0$$

A partir de cette condition, calculons m

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{e(x;h)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - m\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) - m = f'(x) - m$$
$$\Longrightarrow \quad m = f'(x)$$

Ainsi, la différentielle de *f* en *x* est la fonction linéaire

$$\mathrm{df}(x) : \quad h \mapsto f'(x)\, h$$

La différentielle possède la propriété suivante:

la différence entre l'accroissement et la différentielle tend vers 0 plus vite que h, c'est-à-dire

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)\, h = e(x;h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \frac{e(x;h)}{h} = 0$$

Si *h* est assez petit, on peut utiliser l'approximation

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)\, h$$

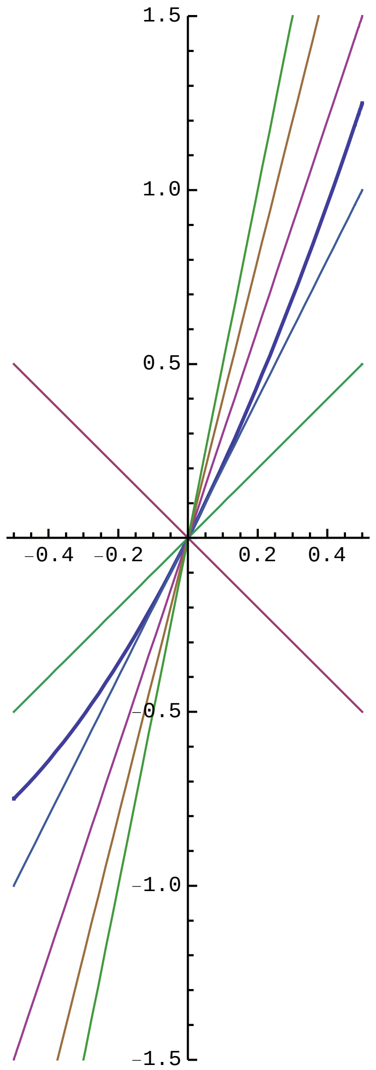
■ Interprétation géométrique

Dans le faisceau des droites passant par le point $(x, f(x))$, c'est la tangente qui, localement, approxime le mieux la fonction. Dans le graphique suivant sont représentées la courbe de la fonction (en trait épais)

$$h \mapsto \Delta \mathrm{f}(x;\ h) = f(x+h) - f(x)$$

et la famille de droites

$$h \mapsto m\, h \qquad \text{pour} \quad m = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



C'est pour la droite

$$h \mapsto m\,h \qquad \text{avec} \quad m = f'(x)$$

que l'écart vertical $e(x;\ h)$ entre la droite et la courbe est minimal.

§ 3-4 *Applications des approximations linéaires*

Sachant que $\sqrt{4} = 2$, calculons par approximation linéaire (sans calculatrice)

$$\sqrt{4.01}$$

■ Calcul à la main

Pour ce faire, calculons la dérivée et la différentielle

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\mathrm{df}(x;\ h) = f'(x)\,h = \frac{h}{2\sqrt{x}}$$

On utilise maintenant l'approximation linéaire

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \mathrm{df}(x;\ \Delta x) \qquad \text{avec} \qquad x = 4 \quad \text{et} \quad \Delta x = 0.01$$

$$f(4 + 0.01) \simeq f(4) + \mathrm{df}(4;\ 0.01)$$

$$\sqrt{4.01} \simeq \sqrt{4} + \frac{0.01}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{0.01}{4} = 2.0025$$

La réponse a été obtenue par calcul oral. L'erreur d'approximation est

$$f(4+0.01) - (f(4) + \mathrm{df}(4;\ 0.01)) = (f(4+0.01) - f(4)) - \mathrm{df}(4;\ 0.01) = e(4;\ 0.01)$$

dont la valeur numérique est

```
e = √4.01 - 2.0025
```

-1.56055×10^{-6}

La valeur absolue de l'erreur relative est inférieure au millionième, ce qui représente une bonne approximation.

$$\frac{e}{2}$$

-7.80275×10^{-7}

<u>Remarque</u>

Il est possibe de donner une estimation de l'erreur. Pour un x et h donnés, (voir *Formulaires et tables* p. 89)

$$e(x;\ h) = \frac{h^2}{2} \sup_{t\in I} \left| f''(t) \right|$$

■ Calculs avec *Mathematica*, première méthode

La différentielle d'une fonction peut se calculer comme suit

```
Clear[f];
f[x_] := √x
```

```
f'[x] h
```

$$\frac{h}{2\sqrt{x}}$$

La valeur numérique de l'approximation linéaire est

```
f[4] + f'[4] 0.01
```

2.0025

L'erreur et la valeur absolue de l'erreur relative valent

```
f[4.01] - (f[4] + f'[4] 0.01)
```

-1.56055×10^{-6}

$$\mathrm{Abs}\left[\frac{f[4.01] - (f[4] + f'[4]\ 0.01)}{f[4]}\right]$$

7.80275×10^{-7}

■ Calculs avec *Mathematica*, deuxième méthode (Facultatif)

La différentielle d'une fonction peut se calculer au moyen de la *différentielle totale* **Dt**

```
Dt[√x]
```

$$\frac{\text{Dt}[x]}{2\sqrt{x}}$$

Dans l'expression précédente, Dt[x] représente Δx (appelé *différentielle totale de x* pour l'occasion).
L'approximation linéaire peut s'écrire

```
(√x + Dt[√x]) /. {Dt[x] → Δx}
```

$$\sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

dont la valeur numérique est

```
(√x + Dt[√x]) /. {Dt[x] → 0.01, x → 4}
```

2.0025

L'erreur et la valeur absolue de l'erreur relative valent

```
(√(x + Dt[x]) - (√x + Dt[√x])) /. {Dt[x] → 0.01, x → 4}
```

-1.56055×10^{-6}

$$\text{Abs}\left[\frac{\sqrt{x + \text{Dt}[x]} - \left(\sqrt{x} + \text{Dt}\left[\sqrt{x}\right]\right)}{\sqrt{x}} \;/.\; \{\text{Dt}[x] \to 0.01,\ x \to 4\}\right]$$

7.80275×10^{-7}

Exercices du § 3

■ Exercice 3-1 Calcul de valeurs numériques approchées

a) Calculez une valeur numérique approchée des expressions suivantes au moyen de la méthode décrite dans le § 3 – 4. On effectuera les calculs littéraux (différentielles) sans ordinateur. Pour les calcul numériques, on utilisera *Mathematica*.

10.03^5

$\sqrt[3]{1002}$

$A = \pi r^2$ avec $r = 3.04\,m$

$v = \dfrac{d}{t}$ avec $d = 1\text{ km}$ et $t = 1\text{ min } 3\,s$ $\left[\text{vitesse en } \dfrac{\text{km}}{\text{min}}\right]$

Calculez aussi l'erreur d'approximation ainsi que la valeur absolue de l'erreur relative.
Facultatif: Pour les deux dernières expressions, estimez l'erreur sans calculer $f(x + \Delta x)$.

b) Calculez une valeur numérique approchée de l'expression suivante au moyen de la méthode décrite dans le § 3 – 4 en effectuant les calculs avec *Mathematica* de deux manières différentes

$$\frac{1}{\sqrt{99.94}}$$

Calculez aussi l'erreur d'approximation ainsi que la valeur absolue de l'erreur relative.

■ Exercice 3-2 Application à l'économie : notion de coût marginal

Dans une certaine usine de pneus, l'expérience a montré que le coût total de production de x pneus est donné par

$$c(x) = 400 + 90\,x - 0.1\,x^2$$

où $0 \leq x \leq 700$ et $c(x)$ est exprimé en francs.

a) Que représente $c(x+1) - c(x)$ en termes de coûts de pneus ?
Que représente $c(x+1) - c(x)$ en termes d'accroissement ?
Application numérique $x = 100$.

b) Approximez $c(x+1) - c(x)$ par une différentielle.
Le résultat s'appelle *fonction coût marginal*.
Application numérique $x = 100$.

■ Exercice 3-3 Application à la physique : chute libre

Considérons un corps en chute libre dont l'horaire est

$$z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2$$

à l'instant $t = 3\,s$. Exprimez la variation de position Δz en fonction de l'accroissement de temps Δt

a) exactement;
b) par une approximation linéaire;
c) sur un graphique, représentez Δt, Δz, dz et e;
d) pour quelles durées Δt la valeur absolue de l'erreur d'approximation est-elle inférieure à 5 cm ?

■ Exercice 3-4 Application à l'économie : notion de profit marginal

Une entreprise a établi que le profit (en francs) en vendant x réfrigérateurs est

$$p(x) = 1.5\,x^2 - 7000\,x - 90\,000$$

Calculez le profit marginal, c'est-à-dire l'approximation linéaire du profit en vendant le réfrigérateur numéro (x+1).
Application numérique $x = 6000$.

■ Exercice 3-5 Accroissement relatif et différentielle relative

Quel est l'accroissement relatif du volume d'une sphère lorsque son rayon augmente de 1 % ?
Comment dépend-il du rayon ?

<u>Indications et directives</u>
La donnée signifie $\frac{\Delta r}{r} = 0.01$ et on cherche $\frac{\Delta V}{V}$. Calculez d'abord la différentielle relative $\frac{dV}{V}$ puis approximez l'accroissement relatif par la différentielle relative.

■ Exercice 3-6

Une sphère a un rayon de $0.5\,m$. De combien faut-il augmenter son rayon afin que son volume augmente de 6 % ? Calculer l'accroissement et l'accroissement relatif,

a) avec *Mathematica*, au moyen d'une méthode exacte;
b) par un calcul à la main, au moyen d'une méthode approchée faisant appel à la différentielle.
c) Quel avantage y a-t-il à utiliser la différentielle ?