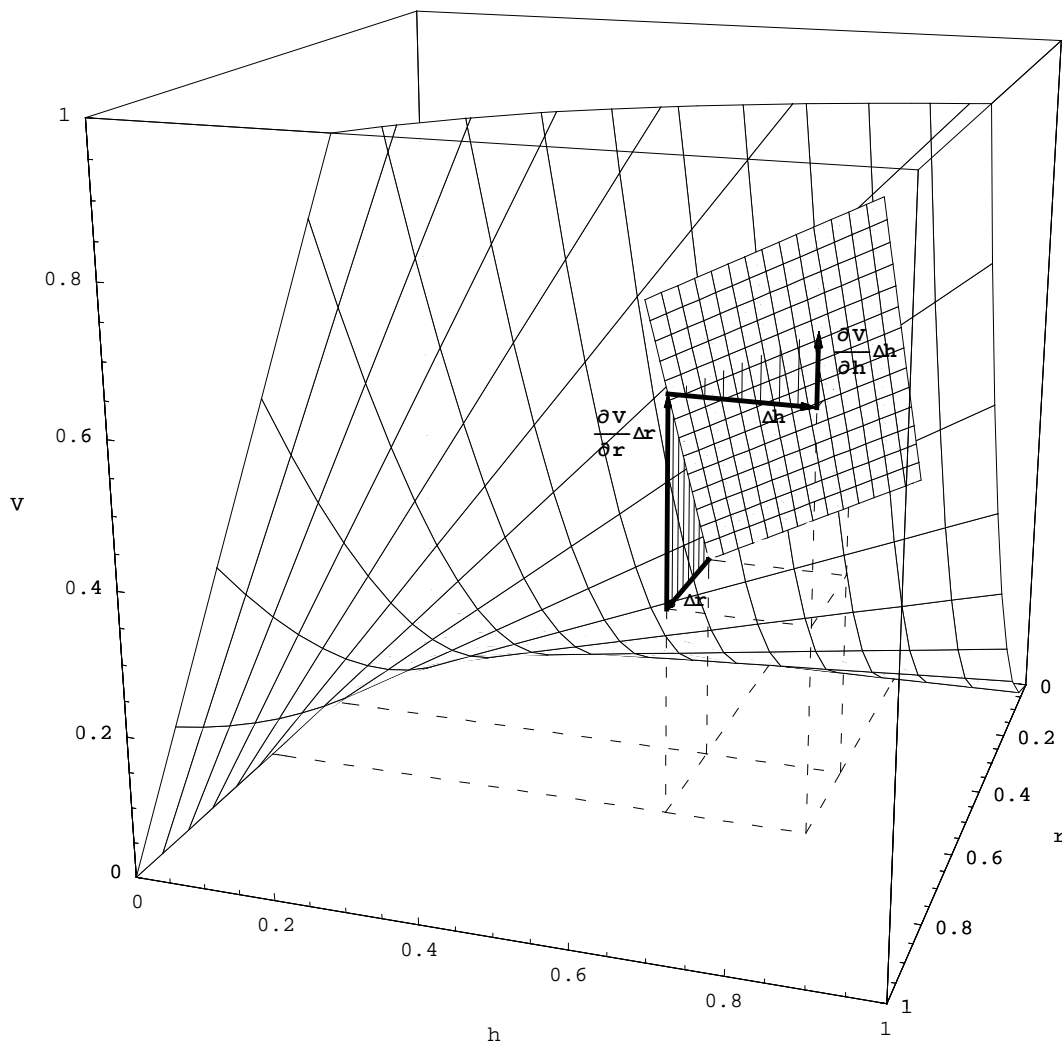


*Collège du Sud, Bulle
3-ème année OS PAM*

Applications des mathématiques

Fonctions de plusieurs variables et différentielles



*Version pour Mathematica
Edition 2010-2011
Marcel Déléze, Eugène Pasquier
www.collegedusud.ch/app/applmaths/*

La numérotation des paragraphes et des pages fait suite au chapitre *Fonctions de plusieurs variables et dérivées partielles*.

§ 3 Différentielle d'une fonction d'une variable

§ 3-1 Exemple introductif

On a mesuré le côté d'un carré. La mesure a donné 1 m avec une imprécision de ± 0.05 m, ce que nous notons

$$x = 1 \quad - 0.05 \leq \Delta x \leq 0.05$$

Etudions l'incertitude sur l'aire du carré

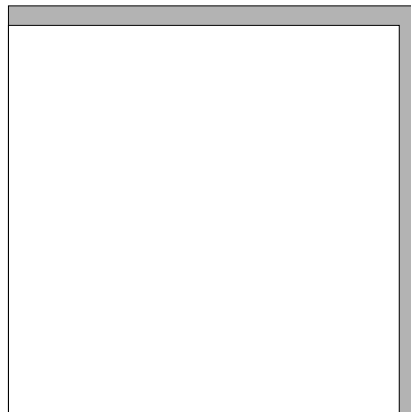
$$y = x^2 \quad \Delta y = ?$$

Utilisons les notations suivantes

$$h = \Delta x$$

$$f(x) = x^2$$

Figure : Δy est l'accroissement de l'aire du carré pour un accroissement du côté de Δx



■ Accroissement de la fonction

La quantité suivante est appelée *accroissement de la fonction f en 1 pour l'accroissement h*

$$\begin{aligned} \Delta y = \Delta f(1; h) &= f(1+h) - f(1) \\ &= (1+h)^2 - 1 = 2h + h^2 \end{aligned}$$

On peut dresser une table des accroissements de la fonction

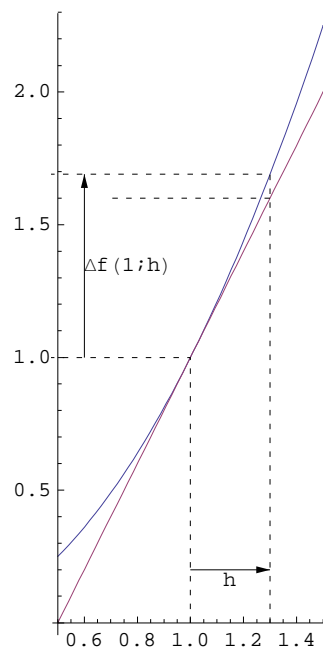
$$h \mapsto \Delta f(1; h) = f(1+h) - f(1)$$

h	$\Delta f(1; h)$
-0.05	-0.0975
-0.04	-0.0784
-0.03	-0.0591
-0.02	-0.0396
-0.01	-0.0199
0.00	0.0000
0.01	0.0201
0.02	0.0404
0.03	0.0609
0.04	0.0816
0.05	0.1025

On interprète ces accroissements dans le graphique de la fonction f de la manière suivante

$\Delta f(1; h) =$ *accroissement de la fonction f en 1 pour l'accroissement h de la variable*

(fig. avec $h = 0.3$)



■ Différentielle

Nous voulons montrer que, lorsque h est petit, la tangente est très proche de la fonction. On peut alors approximer l'accroissement $\Delta f(1; h)$ par une fonction linéaire dont la pente est égale à la dérivée de la fonction

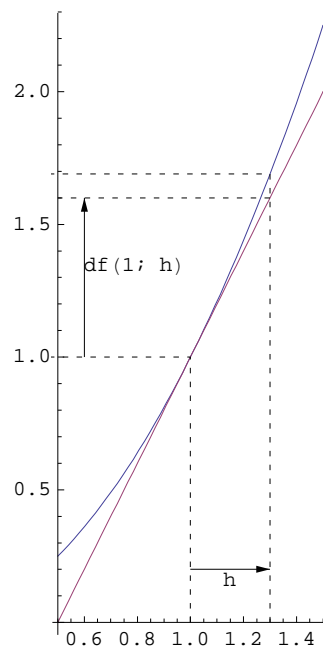
$$df(1; h) = f'(1) h = 2 h$$

Cette expression est appelée *différentielle de f en 1 pour l'accroissement h* . On peut dresser une table des différentielles au voisinage de $x = 1$

$$h \mapsto df(1; h) = f'(1) h$$

h	$df(1; h)$
-0.05	-0.10
-0.04	-0.08
-0.03	-0.06
-0.02	-0.04
-0.01	-0.02
0.00	0.00
0.01	0.02
0.02	0.04
0.03	0.06
0.04	0.08
0.05	0.10

On interprète ces approximations linéaires dans le graphique de la fonction f de la manière suivante
 $df(1; h) =$ *accroissement de la fonction tangente en 1 pour l'accroissement h de la variable*
 (fig. avec $h = 0.3$)



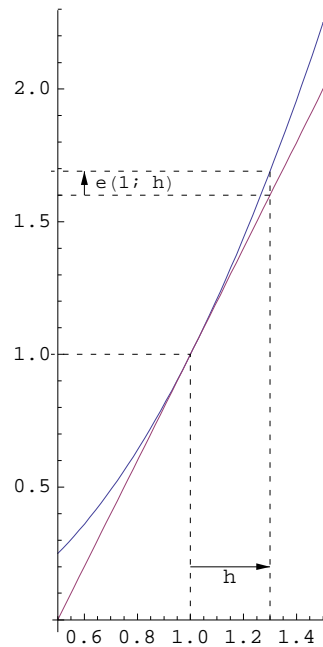
■ Erreur d'approximation

L'erreur d'approximation est

$$h \mapsto e(1; h) = \Delta f(1; h) - df(1; h) = (2h + h^2) - (2h) = h^2$$

On interprète l'erreur d'approximation dans le graphique de la manière suivante

$e(1; h) =$ *mesure de l'écart vertical entre la tangente et la courbe*
 (fig. avec $h = 0.3$)



Comparons maintenant l'accroissement et la différentielle

h	$\Delta f(1; h)$	$df(1; h)$	$e(1; h)$
0.30000	0.6900000000	0.6000000000	0.0900000000
0.03000	0.0609000000	0.0600000000	0.0009000000
0.00300	0.0060090000	0.0060000000	$9.000000000 \times 10^{-6}$
0.00030	0.000600090	0.0006000000	$9.000000000 \times 10^{-8}$
0.00003	0.0000600001	0.0000600000	$9.000000000 \times 10^{-10}$

Lorsque h tend vers 0, l'accroissement de la fonction et la différentielle tendent tous deux vers 0. Mais comme l'erreur d'approximation tend vers 0 beaucoup plus vite encore, l'accroissement et la différentielle prennent des valeurs très voisines:

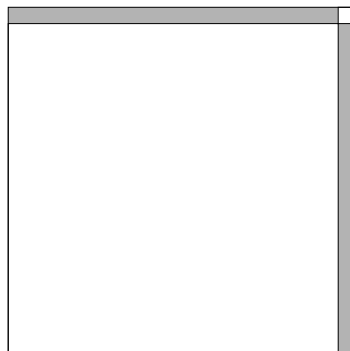
$$\Delta f(1; h) \approx df(1; h) = f'(1) \cdot h = 2h \quad \text{pour de petits } h$$

On peut maintenant donner au problème initial une réponse simple:

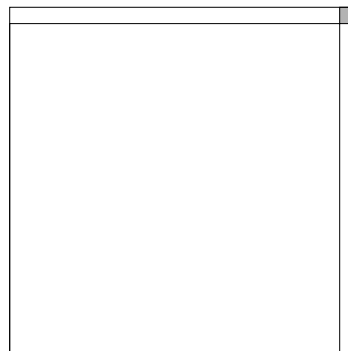
$$\Delta y \approx 2 \Delta x$$

Par exemple, lorsque l'erreur sur la mesure du côté est $\Delta x = 0.05 \text{ m}$, l'erreur sur l'aire du carré est $\Delta y \approx 0.1 \text{ m}^2$.

Approx. par différentielle



Erreur d'approximation



L'erreur d'approximation de l'accroissement par la différentielle est négligeable.

§ 3-2 Différentielle de f en $(x; h)$ Première formulation

Au paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à l'accroissement de la fonction f en $x = 1$ pour l'accroissement $\Delta x = h$. Nous nous intéressons maintenant au même problème (accroissement de la fonction $f(x) = x^2$ pour l'accroissement $\Delta x = h$) en une abscisse x quelconque.

■ Accroissement de la variable

L'accroissement de la variable indépendante x est notée

$$\boxed{\Delta x}$$

Cet accroissement peut aussi être désigné par n'importe quelle autre variable, h par exemple. Un accroissement Δx positif représente une augmentation de x tandis qu'un accroissement négatif représente une diminution de x .

■ Accroissement de la fonction

$$\boxed{\Delta f(x; \Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x)}$$
 ou $\Delta f(x; h) = f(x + h) - f(x)$

■ Différentielle de f en x pour l'accroissement h (ou approximation linéaire)

$$\boxed{df(x; \Delta x) = f'(x) \Delta x}$$
 ou $df(x; h) = f'(x) h$

■ Erreur d'approximation

$$\boxed{e(x; \Delta x) = \Delta f(x; \Delta x) - df(x; \Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x) \Delta x}$$
 ou $e(x; h) = \Delta f(x; h) - df(x; h) = f(x + h) - f(x) - f'(x) h$

Graphiquement, l'erreur d'approximation représente l'écart vertical entre la tangente et la courbe.

■ Changement de repère

Pour centrer notre attention sur le voisinage du point $T(x, f(x))$ et simplifier l'expression de l'accroissement, il est utile d'effectuer le changement de repère suivant dans lequel (x, y) représente les coordonnées du problème donné tandis que (X, Y) représente de nouvelles coordonnées dont l'origine est située au point T . Par rapport à ce nouveau repère, on a donc $T(0, 0)$. C'est le point de vue adopté dans la figure qui suit.

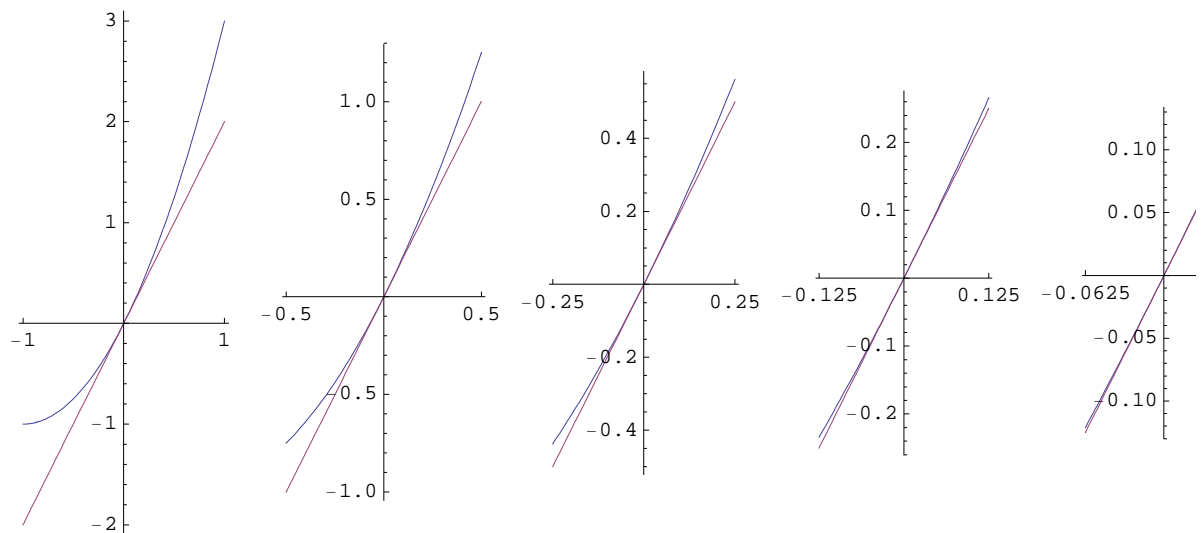
■ Interprétation géométrique

Si on effectue une suite de zooms successifs autour du point $T(x, f(x))$, on peut observer que la courbe tend vers une droite qui est la tangente à la courbe. Par un changement de repère, en considérant le point T comme nouvelle origine, la courbe est localement décrite par la fonction

$$h \mapsto \Delta f(x; h) = f(x + h) - f(x)$$

tandis que la tangente est décrite par la fonction linéaire

$$h \mapsto df(x; h) = f'(x) h$$



■ Existence de la différentielle

La fonction est différentiable en x si et seulement si l'erreur d'approximation tend vers 0 plus vite que h , c'est-à-dire l'erreur divisée par h tend vers 0:

$$\frac{e(x; h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \quad \text{vérifie} \quad \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(x; h)}{h} = 0}$$

En d'autres termes, il faut et il suffit que f soit dérivable en x .

■ Relation entre accroissement et différentielle

$$\begin{aligned} \Delta f(x; \Delta x) &= df(x; \Delta x) + e(x; \Delta x) \\ \Leftrightarrow \quad \boxed{f(x + \Delta x) - f(x) &= f'(x) \Delta x + e(x; \Delta x)} \end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, la quantité $e(x; h)$ tend vers 0 plus vite que h . Pour de petites valeurs de h , l'erreur d'approximation $e(x; h)$ est négligeable par rapport $\Delta f(x; h)$ et $df(x; h)$. Par conséquent, l'accroissement sera très voisin de la différentielle:

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x) h$$

§ 3-3 Différentielle de f en x Deuxième formulation

La différentielle de f en x est la fonction linéaire

$$df(x) : h \mapsto mh \quad \text{où} \quad m \text{ est une constante à déterminer}$$

de telle manière qu'elle approxime au mieux l'accroissement de la fonction f en x

$$\Delta f(x) : h \mapsto f(x+h) - f(x)$$

La meilleure approximation vérifie la condition suivante:

la différence entre l'accroissement et la différentielle tend vers 0 plus vite que h , c'est-à-dire

$$f(x+h) - f(x) - mh = e(x; h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(x; h)}{h} = 0$$

A partir de cette condition, calculons m

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(x; h)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - m \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) - m = f'(x) - m$$

$$\Rightarrow m = f'(x)$$

Ainsi, la différentielle de f en x est la fonction linéaire

$$df(x) : h \mapsto f'(x) h$$

La différentielle possède la propriété suivante:

la différence entre l'accroissement et la différentielle tend vers 0 plus vite que h , c'est-à-dire

$$f(x+h) - f(x) - f'(x) h = e(x; h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(x; h)}{h} = 0$$

Si h est assez petit, on peut utiliser l'approximation

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x) h$$

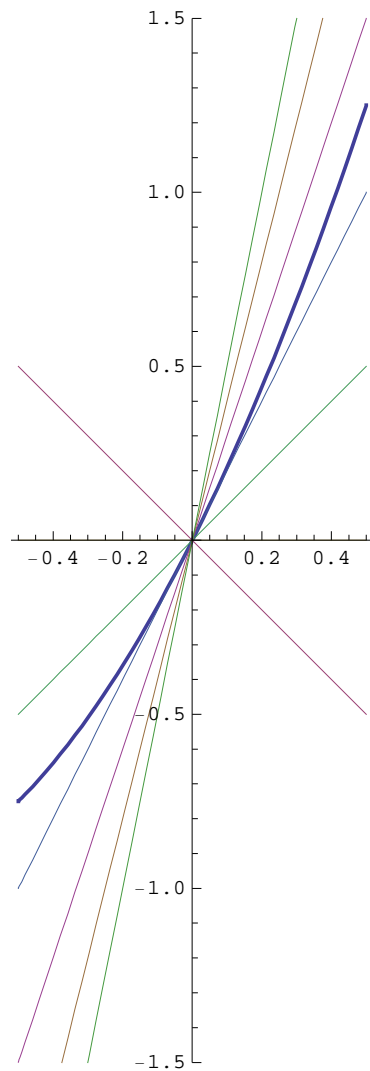
■ Interprétation géométrique

Dans le faisceau des droites passant par le point $(x, f(x))$, c'est la tangente qui, localement, approxime le mieux la fonction. Dans le graphique suivant sont représentées la courbe de la fonction (en trait épais)

$$h \mapsto \Delta f(x; h) = f(x+h) - f(x)$$

et la famille de droites

$$h \mapsto m h \quad \text{pour } m = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



C'est pour la droite

$$h \mapsto m h \quad \text{avec } m = f'(x)$$

que l'écart vertical $e(x; h)$ entre la droite et la courbe est minimal.

§ 3-4 Applications des approximations linéaires

Sachant que $\sqrt{4} = 2$, calculons par approximation linéaire (sans calculatrice)

$$\sqrt{4.01}$$

■ Calcul à la main

Pour ce faire, calculons la dérivée et la différentielle

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$df(x; h) = f'(x) h = \frac{h}{2\sqrt{x}}$$

On utilise maintenant l'approximation linéaire

$$\begin{aligned}
 f(x + \Delta x) &\approx f(x) + df(x; \Delta x) && \text{avec } x = 4 \text{ et } \Delta x = 0.01 \\
 f(4 + 0.01) &\approx f(4) + df(4; 0.01) \\
 \sqrt{4.01} &\approx \sqrt{4} + \frac{0.01}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{0.01}{4} = 2.0025
 \end{aligned}$$

La réponse a été obtenue par calcul oral. L'erreur d'approximation est

$$\begin{aligned}
 f(4 + 0.01) - (f(4) + df(4; 0.01)) &= \\
 (f(4 + 0.01) - f(4)) - df(4; 0.01) &= e(4; 0.01)
 \end{aligned}$$

dont la valeur numérique est

$$\begin{aligned}
 e &= \sqrt{4.01} - 2.0025 \\
 &= -1.56055 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

La valeur absolue de l'erreur relative est inférieure au millionième, ce qui représente une bonne approximation.

$$\begin{aligned}
 \frac{e}{2} \\
 &= -7.80275 \times 10^{-7}
 \end{aligned}$$

Remarque

Il est possible de donner une estimation de l'erreur. Pour un x et h donnés, (voir *Formulaires et tables* p. 89)

$$e(x; h) = \frac{h^2}{2} \sup_{t \in I} \left| f''(t) \right|$$

■ Calculs avec *Mathematica*, première méthode

La différentielle d'une fonction peut se calculer comme suit

```

Clear[f];
f[x_] := Sqrt[x]

f'[x] h

h
2 Sqrt[x]

```

La valeur numérique de l'approximation linéaire est

```

f[4] + f'[4] 0.01

2.0025

```

L'erreur et la valeur absolue de l'erreur relative valent

```

f[4.01] - (f[4] + f'[4] 0.01)

-1.56055 x 10^-6

Abs[ (f[4.01] - (f[4] + f'[4] 0.01)) / f[4] ]

7.80275 x 10^-7

```

■ Calculs avec *Mathematica*, deuxième méthode (Facultatif)

La différentielle d'une fonction peut se calculer au moyen de la *différentielle totale* **Dt**

$$\text{Dt} \left[\sqrt{x} \right]$$

$$\frac{\text{Dt} [x]}{2 \sqrt{x}}$$

Dans l'expression précédente, Dt[x] représente Δx (appelé *différentielle totale de x* pour l'occasion).

L'approximation linéaire peut s'écrire

$$\left(\sqrt{x} + \text{Dt} \left[\sqrt{x} \right] \right) /. \{ \text{Dt} [x] \rightarrow \Delta x \}$$

$$\sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2 \sqrt{x}}$$

dont la valeur numérique est

$$\left(\sqrt{x} + \text{Dt} \left[\sqrt{x} \right] \right) /. \{ \text{Dt} [x] \rightarrow 0.01, x \rightarrow 4 \}$$

$$2.0025$$

L'erreur et la valeur absolue de l'erreur relative valent

$$\left(\sqrt{x + \text{Dt} [x]} - \left(\sqrt{x} + \text{Dt} \left[\sqrt{x} \right] \right) \right) /. \{ \text{Dt} [x] \rightarrow 0.01, x \rightarrow 4 \}$$

$$-1.56055 \times 10^{-6}$$

$$\text{Abs} \left[\frac{\left(\sqrt{x + \text{Dt} [x]} - \left(\sqrt{x} + \text{Dt} \left[\sqrt{x} \right] \right) \right)}{\sqrt{x}} \right] /. \{ \text{Dt} [x] \rightarrow 0.01, x \rightarrow 4 \}$$

$$7.80275 \times 10^{-7}$$

Exercices du § 3

■ Exercice 3-1 Calcul de valeurs numériques approchées

- a) Calculez une valeur numérique approchée des expressions suivantes au moyen de la méthode décrite dans le § 3 – 4. On effectuera les calculs littéraux (différentielles) sans ordinateur. Pour les calcul numériques, on utilisera *Mathematica*.

$$\frac{10 \cdot 03^5}{\sqrt[3]{1002}}$$

$$A = \pi r^2 \quad \text{avec} \quad r = 3.04 \text{ m}$$

$$v = \frac{d}{t} \quad \text{avec} \quad d = 1 \text{ km} \quad \text{et} \quad t = 1 \text{ min } 3 \text{ s} \quad \left[\text{vitesse en } \frac{\text{km}}{\text{min}} \right]$$

Calculez aussi l'erreur d'approximation ainsi que la valeur absolue de l'erreur relative.

Facultatif: Pour les deux dernières expressions, estimez l'erreur sans calculer $f(x + \Delta x)$.

- b) Calculez une valeur numérique approchée de l'expression suivante au moyen de la méthode décrite dans le § 3 – 4 en effectuant les calculs avec *Mathematica* de deux manières différentes

$$\frac{1}{\sqrt{99.94}}$$

Calculez aussi l'erreur d'approximation ainsi que la valeur absolue de l'erreur relative.

■ Exercice 3-2 Application à l'économie : notion de coût marginal

Dans une certaine usine de pneus, l'expérience a montré que le coût total de production de x pneus est donné par

$$c(x) = 400 + 90x - 0.1x^2$$

où $0 \leq x \leq 700$ et $c(x)$ est exprimé en francs.

- Que représente $c(x+1) - c(x)$ en termes de coûts de pneus ?
Que représente $c(x+1) - c(x)$ en termes d'accroissement ?
Application numérique $x = 100$.
- Approximez $c(x+1) - c(x)$ par une différentielle.
Le résultat s'appelle *fonction coût marginal*.
Application numérique $x = 100$.

■ Exercice 3-3 Application à la physique : chute libre

Considérons un corps en chute libre dont l'horaire est

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

à l'instant $t = 3$ s. Exprimez la variation de position Δz en fonction de l'accroissement de temps Δt

- exactement;
- par une approximation linéaire;
- sur un graphique, représentez Δt , Δz , dz et e ;
- pour quelles durées Δt la valeur absolue de l'erreur d'approximation est-elle inférieure à 5 cm ?

■ Exercice 3-4 Application à l'économie : notion de profit marginal

Une entreprise a établi que le profit (en francs) en vendant x réfrigérateurs est

$$p(x) = 1.5x^2 - 7000x - 90000$$

Calculez le profit marginal, c'est-à-dire l'approximation linéaire du profit en vendant le réfrigérateur numéro $(x+1)$.
Application numérique $x = 6000$.

■ Exercice 3-5 Accroissement relatif et différentielle relative

Quel est l'accroissement relatif du volume d'une sphère lorsque son rayon augmente de 1 % ?

Comment dépend-il du rayon ?

Indications et directives

La donnée signifie $\frac{\Delta r}{r} = 0.01$ et on cherche $\frac{\Delta V}{V}$. Calculez d'abord la différentielle relative $\frac{dV}{V}$ puis approximez l'accroissement relatif par la différentielle relative.

■ Exercice 3-6

Une sphère a un rayon de 0.5 m. De combien faut-il augmenter son rayon afin que son volume augmente de 6 % ?

Calculer l'accroissement et l'accroissement relatif,

- avec *Mathematica*, au moyen d'une méthode exacte;
- par un calcul à la main, au moyen d'une méthode approchée faisant appel à la différentielle.
- Quel avantage y a-t-il à utiliser la différentielle ?